БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МАТЕМАТИКА

Л. Данцер

Б. Грюнбаум

В. Кли

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

HELLY'S THEOREM AND ITS RELATIVES

by

LUDWIG DANZER, BRANKO GRÜNBAUM and VICTOR KLEE

from

CONVEXITY

Proceedings of symposia in pure mathematics
volume VII

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
PROVIDENCE, RHODE ISLAND
1963

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Перевод с английского
С. И. ЗАЛГАЛЛЕР

Под редакцией
И. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1968

УДК 531.014

Весьма полный обзор работ, связанных с известной теоремой Хелли о выпуклых телах с общими точками. В нем рассматриваются различные варианты и обобщения этой теоремы, а также ее приложения к самым разнообразным математическим задачам.

В настоящее издание внесены дополнения и исправления, позволяющие читателю ознакомиться с новейшими результатами, в том числе и с теми, которые до сих пор не опубликованы.

Обзор отличается богатством геометрического содержания и будет интересен всем, кто любит геометрию.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Последние десятилетия ознаменовались заметным изменением облика всей математики и, в частности, геометрии. Одним из проявлений этого явилось резкое возрастание интереса к так называемой «дискретной геометрии», изучающей покрытия либо всего пространства (или плоскости), либо какой-либо его части (чаще всего выпуклыми) телами, упаковки или заполнения пространства (выпуклыми) телами и разбиения его на (выпуклые) части; в эти же годы возникло еще одно родственное дискретной геометрии (и также весьма геометричное по своим задачам и методам) направление математики — так называемая комбинаторная геометрия. Этот последний раздел, которому и посвящен настоящий обзор, занимается связанными с учением о выпуклых телах экстремальными задачами о дискретных системах фигур и точек, имеющими ярко выраженный комбинаторный характер, т. е. сводящимися к нахождению тех или иных целочисленных характеристик этих расположений; типичными примерами предложений комбинаторной геометрии являются центральная для настоящей книги теорема Хелли о системах выпуклых тел с общими точками (см. ее формулировку на стр. 11) или так называемая «проблема Борсука» (см. стр. 76), касающаяся разбиений тел на части меньшего диаметра. Сам термин «комбинаторная геометрия» восходит, видимо, к вы-

дающемуся швейцарскому геометру Гуго Хадвигеру (см. его статьи [4], [5] и книгу Г. Хадвигер и Г. Дебруннер [3]; в последующее развитие этого интересного раздела геометрии наибольший вклад внесли авторы настоящего обзора Бранко Грюнбаум, Людвиг Данцер и Виктор Кли.

Этот обзор первоначально был опубликован в томе докладов, прочитанных в 1961 г. на симпозиуме по вопросам выпуклости в г. Сиэтле (США); указанный том, вышедший в свет в 1963 г., составил вып. 7 серии монографий Американской математической ассоциации. Однако статья Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Кли явно выглядела «книгой в книге»; так, например, она начиналась с оглавления и кончалась указателями (хотя вся книга в целом также, разумеется, имела оглавление и указатели); поэтому отдельное ее издание представляется весьма уместным. Статья захватывает ряд разделов «комбинаторной геометрии» — в первую очередь те, которые так или иначе связаны со знаменитой теоремой Хелли о системах выпуклых тел с общими точками.

Авторы указывают, что они стремились сделать свой обзор одновременно общедоступным и исчерпывающим по полноте. Доступность книги определяется ограниченностью предполагаемых у читателя предварительных знаний (хотя заключительная часть § 4 предполагает владение некоторыми простейшими понятиями топологии [1])) — и в этом отношении ее вполне можно рекомендовать студентам-математикам младших курсов. Однако надо иметь в виду, что хотя этот обзор почти не содержит доказательств сообщаемых теорем, он никак не рассчитан на быстрое чтение: написана эта

[1]) Необходимые понятия и предложения читатель сможет найти, например, в книге П. С. Александрова [1].

книга весьма сжато и предполагает у читателя определенный уровень математической культуры. «Энциклопедическую полноту» обзора мы не стремились полностью сохранить и в русском переводе: немногочисленные подстрочные примечания редактора и ссылки на новую литературу имеют лишь иллюстративный характер и не претендуют на охват всего материала по теме книги, появившегося после 1963 г. [Добавленные при переводе названия книг и статей в библиографическом указателе помечены звездочками [1]); не все из них упоминаются в подстрочных примечаниях редактора.] Дополнительно читателю можно рекомендовать содержащую большой конкретный материал (и обширную библиографию) книгу Ф. Валентина [10]; все связанные с выпуклыми многогранниками комбинаторные вопросы с большой полнотой освещены в книге Б. Грюнбаума [22]; по поводу проблематики, примыкающей к уже упоминавшейся выше «проблеме Борсука», см. книгу В. Г. Болтянского и И. Ц. Гохберга [1]. Наконец, кругу проблем, так или иначе связанных с «дискретной геометрией», посвящены монография Роджерса [3] и печатающийся в издаваемых Институтом Научной информации АН СССР сборниках «Итоги науки» обзор Е. П. Барановского «Упаковки, покрытия и разбиения в пространствах постоянной кривизны».

* * *

Весной 1968 г., когда книга уже находилась в типографии, ее редактор получил письма от авторов, содержащие ряд дополнений и исправлений. Исправле-

---

[1]) За помощь в пополнении библиографии редактор весьма признателен В. А. Залгаллеру и Ю. А. Шашкину.

ния внесены непосредственно в текст, а дополнения составили целый раздел «Примечания и дополнения», помещенный в конце книги; в надлежащих местах текста сделаны сноски, номера которых, помещенные в квадратные скобки ([1], [2] и т. д.), указывают соответствующее примечание или дополнение. Многочисленные библиографические ссылки на работы последних лет образовали «Дополнительную библиографию». Дополнительная библиография является непосредственным продолжением основной; они составляют единое целое (например, работы Грюнбаума [1]—[22] читатель найдет в основной библиографии, а [23]—[25] — в дополнительной). Автор этих строк считает своим приятным долгом поблагодарить Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Кли за присланные ими материалы, позволяющие советскому читателю ознакомиться с новейшими результатами, в том числе и с теми, которые до сих пор оставались неопубликованными.

И. М. Яглом

Пролог: Эдуард Хелли

Эдуард Хелли родился в Вене 1 июня 1884 г. Он учился в Венском университете у В. Виртингера; в 1907 г. ему была присуждена степень доктора философии. Последующие несколько лет он учится и занимается исследовательской работой в Гёттингене, преподает в гимназии и публикует четыре тома решений к задачам из учебников по геометрии и арифметике. Количество его научных работ невелико, но они содержат несколько важных результатов. В первой работе [1] [1]) рассмотрены некоторые основные вопросы функционального анализа. Принцип выбора Хелли нашел многочисленные применения и часто цитируется как «теорема Хелли» (см., например, книгу Уиддера о преобразованиях Лапласа) [2]).

Та же работа [1] содержит теорему Хелли — Брея о последовательностях функций и один результат о распространении линейных функционалов, упоминаемый в учебниках функционального анализа Банаха и Рисса — Секефальви-Надя. Его знаменитая теорема о пересечении выпуклых множеств, также обычно называемая «теоремой Хелли», была открыта в 1913 г. и сообщена Радону.

Э. Хелли вступил в австрийскую армию в 1914 г., был ранен и попал в плен, где, кстати, он был вместе с Т. Радо. Он вернулся в Вену в 1920 г., женился в 1921 г. и стал приват-доцентом Венского университета.

---

[1]) В тексте «Пролога» библиографические ссылки относятся к списку работ Э. Хелли, помещенному на стр. 10. — *Прим. ред.*

[2]) Или учебники В. И. Гливенко и Б. В. Гнеденко по теории вероятностей. — *Прим. ред.*

Одновременно с математическими исследованиями и работой в университете он был консультантом ряда финансовых учреждений.

Работа Хелли [3] о бесконечных системах линейных уравнений тоже часто цитируется. Представляющая для нас основной интерес «теорема Хелли» впервые была опубликована автором в 1923 г. ([4]; Хелли [1] в библиографии в конце книги) после более ранних публикаций Радона и Кёнига[1]). Обобщение ее на множества более общего типа опубликовано в 1930 г. [5] (Хелли [2] в библиографии в конце книги).

В 1938 г.[2]) Э. Хелли с семилетним сыном эмигрировал в США, где был профессором двух колледжей в Нью-Джерси, а также Иллинойского технологического института. Умер Э. Хелли в Чикаго в 1943 г.

Большей частью этих сведений мы обязаны его вдове Элизабет (теперь — миссис Вейс), также математику, живущей ныне в Нью-Йорке. Их сын Вальтер — физик; он получил степень доктора философии в Массачусетском технологическом институте и работает в лаборатории Белл Телефон в Нью-Йорке.

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ Э. ХЕЛЛИ:

1. Über lineare Funktionaloperationen, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **121** (1912), 265—297.
2. Über Reihenentwicklungen nach Funktionen eines Orthogonalsystems, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **121** (1912), 1539—1549.
3. Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. Math. Verein*, **31** (1921), 60—97.
4. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **32** (1923), 175—176.
5. Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, *Monatsh. Math. Verein*, **37** (1930), 281—302.
6. Die neue englische Sterblichkeitsmessung an Versicherten, Assekuranz Jahrbuch, 1934.

---

[1]) См. Радон [2], Кёниг [1] в библиографии в конце книги (Радон узнал эту теорему от Э. Хелли, а Кёниг — из публикации Радона.) — *Прим. ред.*

[2]) После аншлюса Австрии с Германией. — *Прим. ред.*

Введение

Подмножество C вещественного линейного пространства называется *выпуклым* тогда и только тогда, когда оно вместе с каждой парой своих точек x и y содержит весь соединяющий их отрезок $[x, y]$. Эквивалентное алгебраическое условие заключается в том, что $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$, каковы бы ни были $x \in C$, $y \in C$ и $\alpha \in [0, 1]$. Из определения следует основное и очевидное свойство пересечения выпуклых множеств: *пересечение любого семейства выпуклых множеств есть снова выпуклое множество,* хотя, конечно, это пересечение может быть пустым. Центром настоящего изложения является теорема, указывающая признаки, обеспечивающие, что пересечение семейства выпуклых множеств не пусто. Эта замечательная теорема Э. Хелли может быть сформулирована следующим образом:

Теорема Хелли. *Пусть $\mathcal{K}$ — семейство из не менее чем $n+1$ выпуклых множеств в n-мерном аффинном пространстве R^n, причем $\mathcal{K}$ конечно или каждое множество из $\mathcal{K}$ компактно. Тогда, если каждые $n+1$ из множеств семейства $\mathcal{K}$ имеют общую точку, то существует точка, общая всем множествам семейства $\mathcal{K}$.*

Начнем с двух простейших примеров. Рассмотрим на прямой R^1 конечное семейство компактных выпуклых множеств, каждые два из которых имеют общую точку. Каждое такое множество представляет собой ограниченный замкнутый отрезок. Если $[\alpha_1, \beta_1], \ldots, [\alpha_m, \beta_m]$ — множества семейства, то ясно, что точка $\min_i \{\beta_i\}$ будет общей всем множествам. Тем же свойством обладает точка $\max_i \{\alpha_i\}$, а также все точки, заключенные между этими двумя. Теперь рассмотрим семейство из трех выпуклых множеств в R^2, имеющих общую точку. На рис. 1 мы видим три заштрихованные области, являющиеся попарным пересечением множеств и трижды заштрихованную область, которая является пересечением всех трех множеств. Теорема Хелли показывает, что если выпуклое

множество в R^2 пересекает *каждую* из трех заштрихованных областей, то оно обязательно пересекает и область, трижды заштрихованную.

Выпуклой оболочкой $\operatorname{conv} X$ множества X в линейном пространстве называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X. Эквивалентно этому $\operatorname{conv} X$ есть множество всех *выпуклых комбинаций*

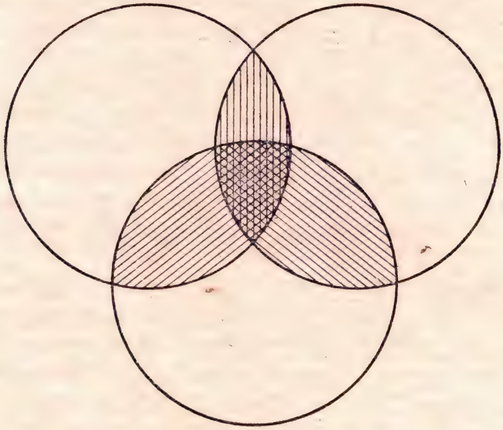

Рис. 1.

точек из X, т. е. $p \in \operatorname{conv} X$ тогда и только тогда, когда существуют точки $x_1, \ldots, x_m$ из X и положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, такие, что $\sum\limits_1^m \alpha_i = 1$ и $p = \sum\limits_1^m \alpha_i x_i$. Теорема Хелли тесно связана со следующими результатами о выпуклых оболочках:

Теорема Каратеодори. *Если $X \subset R^n$, то каждая точка, принадлежащая* $\operatorname{conv} X$, *есть выпуклая комбинация $n+1$ (или меньшего числа) точек, принадлежащих X.*

Теорема Радона. *Каждое множество из $n+2$ или более точек в R^n может быть представлено как*

объединение двух непересекающихся множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Рассмотрим в качестве примера множество $X \subset R^2$. В теореме Каратеодори утверждается, что каждая точка, принадлежащая $\operatorname{conv} X$, должна быть или точкой самого множества X, или внутренней точкой отрезка, соединяющего две точки из X, или внутренней

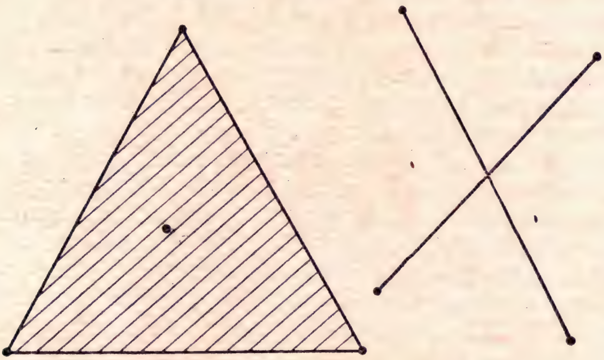

Рис. 2.

точкой треугольника, вершины которого являются точками из X. Пусть X состоит из четырех точек. Теорема Радона утверждает тогда, что либо одна из точек лежит в треугольнике, образованном остальными тремя, либо отрезок, образованный какой-нибудь парой точек, пересекает отрезок, образованный оставшейся парой (см. рис. 2).

Теорема Каратеодори была опубликована в 1907 г.[1]). Теорема Хелли открыта ее автором в 1913 г., но опубликована сначала Радоном [2] в 1921 г. (в доказательстве используется теорема Радона)[2]). Второе доказательство опубликовано Кёнигом [1] в

[1]) См. Каратеодори [1]. — *Прим. ред.*

[2]) В 1940 г. доказательство Радона было переоткрыто студентом Минского университета И. Дукором (см. Дукор [1]), впоследствии погибшим на фронте Отечественной войны. — *Прим. ред.*

1922 г., а собственное доказательство Хелли [1] появилось лишь в 1923 г. После этого все три теоремы и особенно теорему Хелли, изучали, применяли и обобщали многие авторы. Особенно велик поток публикаций, касающихся теоремы Хелли и ее аналогов, в последнее десятилетие[1]). Многие из результатов в этой области были бы вполне понятны Евклиду, который, впрочем, не во всех случаях смог бы понять доказательства. Большинство доказательств все же достаточно элементарны, как и в большинстве разделов комбинаторного анализа, который пока еще не формализован до такой степени, чтобы считаться «неэлементарным». Некоторые относящиеся к нашей теме результаты имеют значительные применения в других разделах математики. Здесь имеется также много интересных нерешенных задач, которые кажутся лежащими на поверхности и, возможно, доступны даже математику-«любителю». Таким образом, изучение теоремы Хелли, ее вариантов и аналогов — подобно, скажем, занятиям элементарной теорией чисел, — имеет много нетехнических аспектов и дает прекрасное введение в теорию выпуклости.

Настоящий обзор задуман как одновременно популярный и энциклопедичный по полноте[1]). Его основная цель — дать сводку всех известных результатов и явиться путеводителем по литературе. Содержание обзора видно из названий отдельных параграфов (см. оглавление).

Поскольку весь этот обзор содержит лишь краткое изложение обширной темы, бесцельно говорить здесь о содержании отдельных параграфов. Отметим, что сделан упор на комбинаторные методы и, соответственно, на конечные семейства подмножеств (или тел) из R^n. О пересечениях бесконечных семейств некомпактных выпуклых множеств, особенно в бесконечномерных линейных пространствах, см. статью Кли [6].

---

[1]) Обзор представляет собой изложение доклада, прочитанного авторами в 1961 г.; он вышел из печати в 1963 г. — *Прим. ред.*

Ниже ставится много нерешенных задач; после § 1, 2 большинство результатов приводится без доказательств. Библиография (несколько сот наименований) содержит все известные нам работы, относящиеся к теореме Хелли или родственным ей результатам в конечномерной постановке. Дополнительно мы перечисляем много других работ, касающихся свойств пересечения или покрытия выпуклых множеств, и некоторые общие источники для изучения выпуклости и ее обобщений. Мы признательны Э. Спеньеру и Р. Ричардсону за некоторые указания, относящиеся к алгебраической топологии, и Дж. Исбелу за информацию о работе Леккеркеркера и Боланда [1]. Часть рассматриваемого нами материала содержится в работах Бенсона [1], Болтянского и Гохберга [1], Боннезена и Фенхеля [1], Валентина [8], Грюнбаума [22], [25], Карлина [1], Кли [9], Хадвигера и Дебруннера [3] (см. также Хадвигер, Дебруннер и Кли [1]), Эглстона [3], Яглома и Болтянского [1] [1]). В дальнейшем эти авторы будут упоминаться, главным образом, в связи с их оригинальными результатами. Для более полного рассмотрения некоторых из упоминаемых нерешенных проблем (и других задач этого рода) см. скоро выходящую книгу Хадвигер, Эрдёш, Фейеш Тот и Кли [1] [2]).

Строение работы в смысле выделения лемм, теорем и т. п. не вполне последовательно. Наиболее важные результаты перенумерованы, чем подчеркнута их значимость и облегчены ссылки внутри обзора. Чтобы избежать громоздкой нумерации, мы приняли систему, где (например) 4.6 означает именно тот результат, который обозначен этим номером, «4.6 и далее» означает результат 4.6 и непосредственно следующий за ним материал, 4.6+ означает только тот

---

[1]) Из других публикаций хочется в первую очередь назвать весьма обстоятельную и содержащую обширный список литературы монографию Валентина [10]. — *Прим. ред.*

[2]) Переводчику и редактору неизвестно, вышла ли уже в свет эта книга. — *Прим. ред.*

материал, который следует за 4.6, но предшествует 4.7, и 4.6— означает материал, который предшествует 4.6, но следует за 4.5.

Многие из наших обозначений и терминов достаточно общеупотребительны и ясны из контекста. Кроме того, в конце книги дан указатель основных понятий и обозначений. Равенство по определению обозначается через $:=$ или $=:$. Выражение «при условии» или просто «если» в определении означает «тогда и только тогда».

Множество точек, для которых утверждение $P(x)$ справедливо, обозначается через $\{x : P(x)\}$. Но если $P(x)$ состоит из двух утверждений $P'(x)$ и $P''(x)$, причем $P'(x)$ имеет особенно простую форму, начинающуюся с «x...», мы будем иногда писать для большей естественности $\{P'(x) : P''(x)\}$ вместо $\{x : P(x)\}$. Например, $\{x \in E : \| x \| \leqslant 1\} : = \{x : x \in E$ и $\| x \| \leqslant 1\}$.

Хотя большая часть результатов формулируется для n-мерного *вещественного линейного* пространства R^n, полная структура R^n не всегда необходима. Некоторые из результатов справедливы в конечномерных векторных пространствах над произвольно упорядоченным полем, в то время как для других, видимо, требуется, чтобы поле было полным или архимедовым. Мы не будем задерживаться здесь на вопросах такого рода. *Евклидово* n-мерное пространство с его обычной метрикой обозначается через E^n[1]).

Выпуклое тело в R^n *есть компактное выпуклое* множество с непустой внутренней областью. Оно является *гладким,* если имеет единственную опорную гиперплоскость в каждой граничной точке, и *строго выпуклым,* если его в н у т р е н н я я область содержит каждый открытый отрезок (x, y), соединяющий две точки тела. Семейство всех выпуклых тел в R^n обозначается через $\mathscr{E}^n$.

---

[1]) В ряде случаев евклидова метрика может быть заменена произвольной *метрикой Минковского* (с произвольной выпуклой индикатрисой длин, иногда даже не центрально-симметричной; ср. ниже стр. 68). — *Прим. ред.*

Результат параллельного переноса (трансляции) множества X мы будем далее называть *транслятом* множества X. *Плоскость* есть транслят линейного подпространства. Группа всех параллельных переносов в R^n обозначается через T^n или, когда нет опасности ошибки, просто через T. *Положительная гомотетия* — это преобразование, которое при некотором фиксированном $y \in R^n$ и некотором вещественном $\alpha > 0$ переводит $x \in R^n$ в $y + \alpha x$ [1]). Группа всех положительных гомотетий в R^n обозначается через H^n (или просто H), а образ множества X при положительной гомотетии мы называем *гомотетом* множества X.

Теоретико-множественное пересечение, объединение и разность обозначаются соответственно через $\cap$, $\cup$ и $\setminus$; знаки $+$ и $-$ сохраняются для векторных или числовых сумм и разностей. Пересечение всех множеств семейства $\mathcal{F}$ обозначается через $\pi\mathcal{F}$. Для точки $x \in R^n$, вещественного числа α и множеств X и $Y \subset R^n$ обозначаем

$$\alpha X := \{\alpha x : x \in X\}, \quad x + Y := \{x + y : y \in Y\},$$
$$X + Y := \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}.$$

TX есть семейство всех транслятов множества X, а HX — семейство всех гомотетов множества X. Внутренняя область, замыкание, выпуклая оболочка, мощность, размерность, объем и диаметр множества X обозначаются соответственно через $\operatorname{int} X$, $\operatorname{cl} X$, $\operatorname{conv} X$, $\operatorname{card} X$, $\dim X$, $\operatorname{vol} X$, $\operatorname{diam} X$. Символ $\varnothing$ означает пустое множество, 0 — вещественное число нуль, а также начало координат R^n. *Единичная сфера* в нормированном линейном пространстве есть множество $\{x : \|x\| = 1\}$, а *единичный шар* — множество $\{x : \|x\| \leqslant 1\}$. Евклидов единичный шар (в E^n) обозначается через B^n, а единичная сфера (в E^{n+1}) через S^n.

Шар в метрическом пространстве (M, ρ) есть множество вида $\{x : \rho(z, x) \leqslant \varepsilon\}$ при каждом фиксирован-

---

[1]) Таким образом, параллельный перенос есть частный случай положительной гомотетии (отвечающий значению $\alpha = 1$). — *Прим. ред.*

ном $z \in M$ и $\varepsilon > 0$. Если мы имеем дело с семейством HC, где C — заданное выпуклое тело в R^n, то эти гомотеты называются *ячейками.* Если ρ, как обычно — метрика (расстояние), а X и Y — множества в соответствующем метрическом пространстве, то

$$\rho(X, Y) := \inf\{\rho(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Как правило, точки пространства обозначаются строчными латинскими буквами, множества — прописными латинскими буквами, семейства множеств — прописными рукописными буквами, свойства семейств множеств (т. е., по существу, семейства семейств множеств) — прописными готическими буквами. Строчные греческие буквы используются для вещественных чисел, индексов и мощностей. Иногда для этой же цели употребляются строчные латинские буквы. Отклонения от этой системы обозначений всюду указываются.

§ 1. Доказательства теоремы Хелли

Как уже сказано во введении, теорема Хелли касается двух типов семейств выпуклых множеств: конечных и состоящих из компактных множеств. Предположения эти можно ослабить, но некоторая аккуратность здесь необходима, чтобы исключить такие семейства, как множество всех интервалов $(0, \beta)$ при $\beta > 0$, или множество всех полупрямых $[\alpha, \infty)$ в R^1. Для компактных выпуклых множеств теорему можно сразу свести к случаю конечных семейств; если же считать результат известным для конечных семейств, то мы можем рассматривать лишь семейства множеств, обладающие *«свойством конечного пересечения»* (каждое конечное подсемейство имеет непустое пересечение). Ясно, что пересечение такого семейства компактных множеств непусто. Это типичный прием, позволяющий свести многие дальнейшие рассмотрения к случаю конечного семейства. Основные трудности здесь по своей природе скорее комбинаторного, чем топологического характера; поэтому там, где это

будет нам удобно, мы ограничимся рассмотрением конечных семейств. Читатель сам может формулировать и доказать обобщения на бесконечные семейства. (См. также статью Кли [6] о пересечении бесконечных семейств некомпактных множеств.)

Для конечного семейства выпуклых множеств теорема Хелли может быть сведена к случаю конечного семейства выпуклых многогранников. Пусть $\mathcal{K}$ — конечное семейство выпуклых множеств (в некотором линейном пространстве), каждые $n+1$ из которых имеют общую точку. Рассмотрим все возможные способы выбора $n+1$ множеств из $\mathcal{K}$ и для каждого такого выбора выделим одну точку в пересечении $n+1$ выбранных множеств. Пусть J — (конечное) множество всех выбранных точек. Для каждого $K \in \mathcal{K}$ обозначим через K' выпуклую оболочку пересечения $K \cap J$. Очевидно, что каждое множество K' есть выпуклый многогранник; каждые $n+1$ из множеств K' имеют общую точку; каждая точка, общая всем множествам K', принадлежит пересечению всех множеств исходного семейства $\mathcal{K}$.

Мы переходим теперь к некоторым из многочисленных доказательств теоремы Хелли и просим извинения у всех тех, кто обнаружит, что его любимые доказательства нами пропущены. (Некоторые другие доказательства разбираются в § 4 и 9.) Представляется целесообразным рассмотреть различные подходы к теореме; они дают ей разное освещение и во многих случаях ведут к различным обобщениям.

Собственное доказательство Хелли [1] опирается на теорему отделимости выпуклых множеств и проводится индукцией по числу измерений пространства. (По существу то же доказательство было дано Кёнигом [1].) Среди многих других это доказательство привлекает нас как наиболее геометричное и интуитивно естественное. Теорема очевидна для R^0. Пусть она верна для R^{n-1}; рассмотрим в R^n конечное семейство $\mathcal{K}$ из не менее чем $n+1$ компактных выпуклых множеств, каждые $n+1$ из которых имеют общую точку. Допустим, что пересечение $\pi\mathcal{K}$ пусто. Тогда найдется подсемейство $\mathcal{F}$ семейства $\mathcal{K}$ и такое

множество $A \in \mathscr{F}$, что $\pi\mathscr{F} = \varnothing$, но $\pi(\mathscr{F} \setminus \{A\} : = M \neq \neq \varnothing$. Поскольку A и M — непересекающиеся непустые компактные выпуклые подмножества из R^n, теорема отделимости гарантирует существование такой гиперплоскости H в R^n, что A лежит в одном из открытых полупространств, определяемых гиперплоскостью H, а M — в другом. Чтобы получить такую гиперплоскость H, примем в качестве нормы евклидову норму

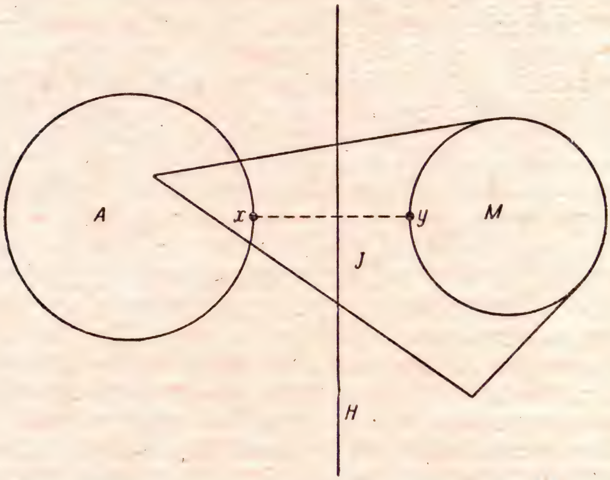

Рис. 3.

в R^n; пусть x и y — такие точки соответственно из A и M, что $\|x - y\| = \rho(A, M) : = \inf\{\|a - m\| : a \in A, m \in M\}$; тогда роль H может выполнить гиперплоскость, проходящая через середину $(x+y)/2$ отрезка $[x, y]$ ортогонально ему; см. рис. 3. Пусть J обозначает пересечение каких-нибудь n множеств из $\mathscr{F} \setminus \{A\}$. Очевидно, $J \supset M$ и, так как каждые $n+1$ множеств из $\mathscr{K}$ имеют общую точку, то J должно пересекать A. Поскольку множество J выпукло, оно, простираясь через H от M к A, должно пересекать H. Следовательно, существует общая точка у каждых n множеств вида $G \cap H$, где $G \in \mathscr{F} \setminus \{A\}$. По индуктивному предположению, примененному к $(n-1)$-мерному простран-

ству H, следует, что $M \cap H$ не пусто. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Доказательство Радона [2] основано на результате, сформулированном выше в качестве теоремы Радона. Чтобы доказать сам этот результат, возьмем любые точки $p_1, \ldots, p_m$ в R^n, $m \geqslant n+2$. Рассмотрим систему из $n+1$ линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_i = 0 = \sum_{i=1}^{m} \tau_i p_i^j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где $p_i = (p_i^1, \ldots, p_i^n)$ — обычные координаты в R^n. Поскольку $m > n+1$, система имеет нетривиальное решение $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$. Пусть U — множество тех i, для которых $\tau_i \geqslant 0$, а V — множество тех i, для которых $\tau_i < 0$, и $c := \sum_{i \in U} \tau_i > 0$. Тогда $\sum_{i \in V} \tau_i = -c$ и $\sum_{i \in U} \frac{\tau_i}{c} p_i = \sum_{i \in V} \left(-\frac{\tau_i}{c} p_i\right)$, что завершает доказательство теоремы Радона.

Теперь докажем теорему Хелли для конечного семейства выпуклых множеств в R^n. Теорема очевидна для семейства из $n+1$ множеств. Предположим, что теорема доказана для всех семейств из $j-1$ выпуклых множеств в R^n, где $j \geqslant n+2$, и рассмотрим в R^n семейство $\mathscr{K}$ из j выпуклых множеств, каждые $n+1$ из которых имеют общую точку. По индуктивному предположению для каждого $A \in \mathscr{K}$ имеется точка p_A, общая всем множествам из $\mathscr{K} \setminus \{A\}$, и по теореме Радона существует такое разбиение $\mathscr{K}$ на подсемейства $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, что одна и та же точка z является общей для выпуклых оболочек $\operatorname{conv}\{p_F : F \in \mathscr{F}\}$ и $\operatorname{conv}\{p_G : G \in \mathscr{G}\}$ (см. рис. 4, где $\mathscr{F} = \{A, C\}$ и $\mathscr{G} = \{B, D\}$). Но тогда $z \in \pi\mathscr{K}$, и доказательство закончено.

В литературе есть много других подходов к теореме Хелли. Некоторые из наиболее интересных можно кратко охарактеризовать.

Радемахер и Шёнберг [1] и Эглстон [3] используют теорему Каратеодори и понятие метрической аппроксимации.

Сандгрен [1] и Валентин [9] используют теорему Каратеодори и теорию двойственности выпуклых конусов. Применение Ланнером [1] опорных функционалов также сводится к теории двойственности.

Боненблуст, Карлин и Шепли [1] используют теорему Каратеодори для доказательства одного

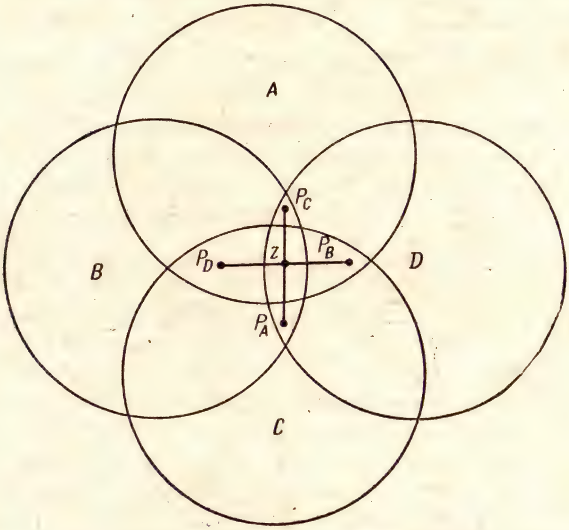

Рис. 4.

результата о выпуклых функциях, из которого следует теорема Хелли (см. 4.5).

Хадвигер [2], [5] получает теорему Хелли и другие результаты, пользуясь характеристикой Эйлера — Пуанкаре, которую он вводит в элементарной форме.

Хелли [2] получает обобщение своей теоремы с помощью комбинаторной топологии (см. 4.11).

Р. Радо [2] доказывает теорему о пересечении в общей алгебраической постановке и получает теорему Хелли как ее следствие (см. 9.4).

Аксиоматический подход Леви [1] базируется на теореме Радона (см. 9.3).

Еще некоторые доказательства теоремы Хелли есть у Дукора [1], Красносельского [2], Проскурякова [1], Рабина [1][1]). Для нашей цели наиболее прямыми и простыми подходами к теореме Хелли являются описанные выше доказательства Хелли и Радона. Однако каждое из многочисленных доказательств проливает дополнительный свет на теорему и связанные с ней вопросы. Как показано Сандгреном [1] и Валентином [9], теория двойственности дает эффективный механизм для изучения теоремы Хелли и ее аналогов. Подход с позиций комбинаторной топологии ведет к интересным задачам, но еще мало развит.

Мы уже отмечали тесную связь теоремы Хелли с теоремами Каратеодори и Радона. В действительности каждая из этих трех теорем может быть выведена из любой другой (с использованием опорных гиперплоскостей, а иногда без их помощи) и каждая может быть доказана «прямо» индукцией по числу измерений (с использованием опорных гиперплоскостей или теоремы отделимости). Возможно, внутренние связи можно было бы лучше проследить, если привести различные системы аксиом теории выпуклости и в каждой из них изучить связь следующих пяти фундаментальных результатов: теоремы Хелли, теоремы Каратеодори, теоремы Радона, существования опорных гиперплоскостей в фиксированных точках выпуклых множеств и существования отделяющих гиперплоскостей для пар выпуклых множеств. Леви [1] делает небольшой шаг в этом направлении; в § 9 мы опишем различные обобщенные понятия выпуклости, отправляясь от которых можно подойти к решению этой задачи.

Здесь стоит привести еще принадлежащее Дворецкому [1] утверждение, в некотором смысле

---

[1]) Доказательство И. Г. Дукора, как уже указывалось, близко к доказательству Радона. На теореме Радона (которой он дает комбинаторное доказательство) базируется и И. В. Проскуряков. Оригинальное доказательство М. А. Красносельского основано на известной из комбинаторной топологии лемме Шпернера (см., например, Ефремович [1] или Томпкинс [1]). — *Прим. ред.*

обратное теореме Хелли. Будем говорить, что семейство множеств обладает $\mathfrak{H}_n$-*свойством*, если либо пересечение всего семейства непусто, либо имеются $n+1$ или менее множеств семейства, имеющих пустое пересечение. Теорема Хелли утверждает, что каждое семейство компактных *выпуклых* множеств в R^n обладает $\mathfrak{H}_n$-свойством. Разумеется, $\mathfrak{H}_n$-свойство не характеризует выпуклость; семейство из невыпуклых множеств в R^n может «случайно» обладать $\mathfrak{H}_n$-свойством (см. рис. 5). Теорема Дворецкого может рассматриваться

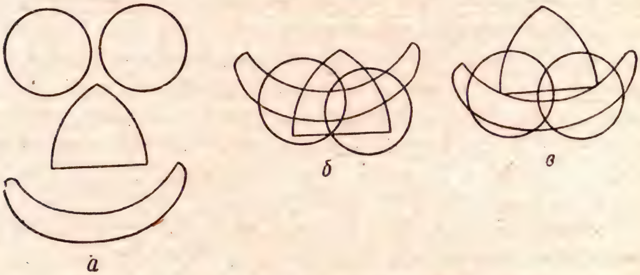

Рис. 5.

как утверждение о том, что если семейство компактных множеств в R^n обладает $\mathfrak{H}_n$-свойством *благодаря аффинной структуре его членов*, то все *множества* семейства выпуклы.

Теорема Дворецкого. *Пусть* $\{K_\iota : \iota \in I\}$ — *семейство компактных множеств в* R^n, *ни одно из которых не принадлежит какой-либо гиперплоскости. Тогда эквивалентны следующие два утверждения:*

все множества K_ι *выпуклы;*

если (для каждого ι) J_ι *аффинно эквивалентно* K_ι, *то семейство* $\{J_\iota : \iota \in I\}$ *обладает* $\mathfrak{H}_n$-*свойством.*

Быть может, будет полезен пример. На рис. 5 каждое из семейств 5*а*, 5*б*, 5*в* состоит из четырех множеств. Все множества, кроме одного, выпуклы. Все семейства получены параллельными переносами членов семейства 5*а*. Семейства 5*а* и 5*б* обладают

$\mathfrak{H}_2$-свойством (скорее из-за расположения, чем из-за структуры входящих в них множеств), а семейство 5*в* уже $\mathfrak{H}_2$-свойством не обладает.

§ 2. Применения теоремы Хелли

Несколько условно применения теоремы Хелли можно разделить на два типа. В одних случаях с ее помощью доказывают комбинаторные утверждения такого примерно типа:

Если в некотором семействе каждое подсемейство из k членов семейства обладает некоторым свойством, то им обладает и все семейство.

В других случаях она используется для доказательства теорем, которые не являются явно комбинаторными. При доказательстве некоторого свойства класса множеств его устанавливают для особенно простых множеств из этого класса, а затем при переходе, от частного случая к общему используют теорему Хелли. То же можно сказать о применениях теоремы Каратеодори. Мы дадим несколько примеров использования теоремы Хелли и прокомментируем их в конце параграфа.

2.1. *Пусть $\mathscr{K}$ — семейство из не менее чем $n+1$ выпуклых множеств в R^n; C — выпуклое множество в R^n; $\mathscr{K}$ конечно или C и все множества семейства $\mathscr{K}$ компактны. Тогда существование транслята множества C, который пересекает (аналогично «содержится в», аналогично «покрывает») все множества из $\mathscr{K}$, гарантируется существованием такого же рода транслята для каждых $n+1$ множеств семейства $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Отнесем каждому $K \in \mathscr{K}$ множество $K' := \{x \in R^n : (x+C) r K\}$, где отношение r означает «пересекает», «содержится в» или «покрывает». Тогда каждое множество K' оказывается выпуклым, и вышеприведенные предположения влекут за собой то, что каждые $n+1$ из множеств K' имеют

общую точку. По теореме Хелли существует точка $z \in \bigcap_{K \in \mathscr{K}} K'$, а тогда $(z+C) r K$ при всех $K \in \mathscr{K}$.

Общей трансверсалью семейства множеств называется прямая, пересекающая все множества этого семейства.

2.2. *Пусть $\mathscr{S}$ — конечное семейство параллельных отрезков в R^2, каждые три из которых имеют общую трансверсаль. Тогда существует трансверсаль, общая всем отрезкам из $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathscr{S}$ состоит не менее чем из трех отрезков и что все отрезки параллельны оси Y. Для каждого отрезка $S \in \mathscr{S}$ обозначим через C_S множество таких точек $(\alpha, \beta) \in R^2$, что S пересекается прямой $y = \alpha x + \beta$. Тогда каждое множество C_S выпукло, и каждые три из таких множеств имеют общую точку; поэтому, в силу теоремы Хелли, существует точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \bigcap_{S \in \mathscr{S}} C_S$. Прямая $y = \alpha_0 x + \beta_0$ есть общая трансверсаль семейства $\mathscr{S}$.

2.3. *Если выпуклое множество в R^n покрыто конечным семейством открытых или замкнутых полупространств, то оно покрыто какими-нибудь $n+1$ или менее из этих полупространств.*

Доказательство. Для общности предположим, что $\mathscr{F}$ — конечное семейство множеств в R^n, покрывающих выпуклое множество C, и что для каждого $F \in \mathscr{F}$ множество $F' := C \setminus F$ выпукло. Тогда $\{F' : F \in \mathscr{F}\}$ — конечное семейство выпуклых множеств, пересечение которых пусто. По теореме Хелли есть $n+1$ или менее множеств в этом семействе, пересечение которых также пусто. Это завершает доказательство.

2.4. *Два конечных подмножества X и Y в R^n могут быть строго разделены (гиперплоскостью) тогда и только тогда, когда для каждого набора S из не более чем $n+2$ точек множества $X \cup Y$ могут быть строго разделены множества $S \cap X$ и $S \cap Y$.*

Доказательство. Можно считать, что $X \cup Y$ содержит не менее чем $n+2$ точки. Пусть для каждого $x := (x^1, \ldots, x^n) \in X$ и $y := (y^1, \ldots, y^n) \in Y$ открытые подпространства J_x и Q_y в R^{n+1} определены следующим образом:

$$J_x := \left\{ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_0 + \sum_1^n \lambda_i x^i > 0 \right\},$$

$$Q_y := \left\{ \lambda : \lambda_0 + \sum_1^n \lambda_i y^i < 0 \right\}.$$

По предположению, каждые $n+2$ множества семейства $\{J_x : x \in X\} \cup \{Q_y : y \in Y\}$ имеют общую точку. По теореме Хелли, существует $\lambda \in \left(\bigcap_{x \in X} J_x \right) \cap \left(\bigcap_{y \in Y} Q_y \right)$. Тогда множества X и Y строго разделяются гиперплоскостью $\left\{ z \in R^n : \sum_1^n \lambda_i z^i = -\lambda_0 \right\}$.

Если u и v — точки множества $X \subset R^n$, то выражение «*u видна из v*» (в множестве X) означает, что $[u, v] \subset X$.

2.5. *Пусть X — бесконечное компактное подмножество пространства R^n. Предположим, что для каждых $n+1$ точек из X существует точка, из которой видны все эти $n+1$ точек. Тогда множество X звездно (т. е. в X найдется точка, из которой видны все остальные).*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ обозначим $V_x = \{y : [x, y] \subset X\}$. По предположению каждые $n+1$ множества V_x имеют общую точку. Мы хотим доказать, что $\bigcap_{x \in X} V_x \neq \varnothing$. По теореме Хелли существует точка $y \in \bigcap_{x \in X} \operatorname{conv} V_x$. Мы докажем, что $y \in \bigcap_{x \in X} V_x$. Допустим обратное; тогда существуют $x \in X$ и $u \in [y, x) \setminus X$ и найдется такое $x' \in X \cap [u, x]$, что $[u, x') \cap X = \varnothing$. Далее найдется такое $w \in (u, x')$, что $\| w - x' \| = \frac{1}{2} \rho(\{u\}, X)$ и такие $v \in [u, w]$ и $x_0 \in X$,

что $\|x_0 - v\| = \rho([u, w], X)$. Так как x_0 есть ближайшая к v точка из X, то очевидно, что V_{x_0} принадлежит замкнутому полупространству Q, в котором отсутствует v и которое ограничено гиперплоскостью, проходящей через x_0 перпендикулярно к $[v, x_0]$. Но тогда $y \in \operatorname{conv} V_{x_0} \subset Q$ и $\angle y x_0 v \geqslant \pi/2$, откуда $\angle x_0 v y < < \pi/2$. Так как $\rho(\{v\}, X) \leqslant \rho(\{w\}, X) < \rho(\{u\}, X)$, то ясно, что $v \neq u$, и значит некоторая точка из $[u, v)$ находится ближе к x_0 чем v. Это противоречит выбору v, и доказательство завершено.

Все пять приведенных результатов иллюстрировали первый тип применений теоремы Хелли. Дадим три примера другого рода, в которых доказываемые теоремы кажутся не имеющими комбинаторного характера; однако теорема Хелли очень полезна и при их доказательстве.

2.6. *Если X — множество в E^n и $\operatorname{diam} X \leqslant 2$, то X принадлежит (евклидову) шару радиуса $[2n/(n+1)]^{1/2}$. Если X не принадлежит никакому меньшему шару, то $\operatorname{cl} X$ содержит вершины правильного n-мерного симплекса с ребром длины 2.*

Доказательство. Мы приведем два доказательства этого важного результата. Первое логически проще и показывает, как в приложениях теоремы Хелли и Каратеодори могут иногда заменять одна другую. Второе более геометрично. Комбинируя (различные) аспекты этих доказательств, можно придти к третьему доказательству, которое легко усовершенствовать так, чтобы получить второе из равенств 6.8 (см. § 6, стр. 73).

С помощью теоремы Хелли (или результата 2.1) утверждение 2.6 сводится к случаю множеств из не более чем $n+1$ точек. Действительно, рассмотрим $X \subset E^n$ с $\operatorname{card} X \geqslant n+1$ и для каждого $x \in X$ возьмем шар $B_x := \{y : \|y - x\| \leqslant [2n/(n+1)]^{1/2}\}$. Если 2.6 доказано для множеств из $n+1$ (и менее) точек, то каждые $n+1$ из множеств B_x имеют общую точку, откуда $\bigcap_{x \in X} B_x$ непусто по теореме Хелли, и требуемое заключение получено.

Пусть теперь $X \subset E^n$ и $\operatorname{card} X \leqslant n+1$. Обозначим через $y=0$ центр наименьшего шара B, содержащего X, и через $r(X)$ — его радиус. Пусть

$$\{z_0, \ldots, z_m\} := \{x \in X : \|y-x\| = r\},$$

где $r := r(X)$ и $m \leqslant n$. Легко проверить, что $y \in \operatorname{conv}\{z_0, \ldots, z_m\}$, поэтому $0 = \sum_0^m \alpha_i z_i$, где $\sum_1^m \alpha_i = 1$ и все $\alpha_i \geqslant 0$. Для каждых i и j обозначим $d_{ij} := \|z_i - z_j\| \leqslant 2$, откуда $d_{ij}^2 = 2r^2 - 2(z_i, z_j)$. Для каждого j

$$1-\alpha_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \geqslant \sum_0^m \alpha_i \frac{d_{ij}^2}{4} = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_0^m \alpha_i z_i, z_j\right) = \frac{r^2}{2};$$

суммируя по j (от 0 до $m \leqslant n$), приходим к $m \geqslant (m+1) r^2/2$, откуда

$$r^2 \leqslant \frac{2m}{m+1} \leqslant \frac{2n}{n+1}.$$

Случай равенства влечет за собой $m=n$ и $d_{ij}=2$ для всех $i \neq j$, что и завершает доказательство.

В приведенном рассуждении предположение $\operatorname{card} X \leqslant n+1$ (оправданное теоремой Хелли) использовалось только для того, чтобы гарантировать, что точка $y \in \operatorname{conv} X$ может быть представлена как выпуклая комбинация из $n+1$ или менее точек из X. Но это гарантируется также теоремой Каратеодори, поэтому приведенное доказательство может основываться и на этой теореме.

Второе доказательство теоремы 2.6 проведем индукцией по числу измерений. Для E^1 теорема тривиальна. Допустим, что она справедлива для E^{n-1} и рассмотрим множество $X \subset E^n$ с $\operatorname{card} X \leqslant n+1$. Пусть y, B и $r(X)$ имеют прежний смысл. Если $y \in \operatorname{conv} Z$ для некоторого $Z \subsetneqq X$, то доказательство завершено по индуктивному предположению, так как в этом случае B есть наименьший шар, содержащий Z. (Легко доказать, что если $y \in \operatorname{conv} Z$ и $p \in E^n \setminus \{y\}$, то существует такая точка $z \in Z$, что $\|z-y\| < \|z-p\|$.

Это эквивалентно лемме, упоминаемой ниже в конце п. 9.9.)

Таким образом, мы можем предполагать, что $\operatorname{card} X = n+1$ и $y \in \operatorname{int} \operatorname{conv} X$. Обозначим через $\mathscr{X}$ семейство всех $(n+1)$-точечных множеств $X \subset E^n$ с $\operatorname{diam} X \leqslant 2$, нуждающихся для своего покрытия в шарах наибольшего радиуса $r(X)$. По соображениям компактности такие множества X существуют и для них заведомо $\operatorname{diam} X = 2$. Рассмотрим любое такое множество $\{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{X}$ и допустим, что оно не состоит из вершин правильного симплекса с ребром 2, т. е. предположим, что

$$\min \{\|x_i - x_j\| : 0 \leqslant i < j \leqslant n\} = \|x_0 - x_1\| < 2.$$

Тогда нетрудно найти около x_0 такую точку x_0', что $\|x_0 - x_1\| < \|x_0' - x_1\| < 2$, $\|x_0 - x_i\| = \|x_0' - x_i\|$ при $i > 1$ и $r(\{x_0', \ldots, x_n\}) > r(\{x_0, \ldots, x_n\})$. Последнее противоречит максимальности $r(\{x_0, \ldots, x_n\})$. Это завершает доказательство.

2.7. *Если C — выпуклое тело в R^n, то всегда существует такая точка $z \in C$, что для каждой проходящей через z хорды $[u, v]$ тела C*

$$\frac{\|z-u\|}{\|v-u\|} \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

Доказательство. Для каждой точки $x \in C$ рассмотрим множество $C_x := x + \frac{n}{n+1}(C - x)$. Мы утверждаем, что $\bigcap_{x \in C} C_x \neq \varnothing$. Чтобы это доказать, согласно теореме Хелли, достаточно убедиться, что если $x_0, \ldots, x_n$ — точки тела C, то $\bigcap_0^n C_{x_i}$ содержит точку $y := \frac{1}{(n+1)} \sum_0^n x_i$. Но последнее очевидно, так как при каждом j

$$y = x_j + \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} x_i - x_j\right) \in x_j + \frac{n}{n+1}(C - x_j).$$

Теперь рассмотрим произвольную хорду $[u, v]$, проходящую через точку $z \in \bigcap_{x \in C} C_x$. Тогда

$$z \in u + \frac{n}{n+1}([u, v] - u),$$

откуда

$$z = u + \frac{n}{n+1}\lambda(v - u)$$

для некоторого $\lambda \in [0, 1]$ и $\|z - u\|/\|v - u\| = \lambda n(n+1)^{-1} \leqslant \leqslant n(n+1)^{-1}$, что завершает доказательство.

2.8. *Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивное семейство множеств, которое включает все открытые полупространства в R^n, и пусть на $\mathcal{A}$ задана неотрицательная функция μ, удовлетворяющая условиям:*

a^0. *Если $X, Y \in \mathcal{A}$, то $\mu(X \cup Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$;*

b^0. *Если $X, Y \in \mathcal{A}$ и $X \subset Y$, то $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$;*

c^0. *Существует такое ограниченное множество $B \subset R^n$, что $R^n \setminus B \in \mathcal{A}$ и $\mu(R^n \setminus B) < (n+1)^{-1}\mu(R^n)$.*

Тогда в R^n существует такая точка x^*, что для любого содержащего x^* открытого полупространства J

$$\mu(J) \geqslant \frac{1}{(n+1)}\mu(R^n).$$

Доказательство. Предположим, не теряя общности, что $\mu(R^n) = 1$. Пусть $\mathcal{J}$ — множество всех открытых полупространств в R^n. Для каждого $J \in \mathcal{J}$ обозначим через J' замкнутое полупространство $R^n \setminus J$. Пусть $\mathcal{G}$ — семейство тех $G \in \mathcal{J}$, для которых $\mu(G) < (n+1)^{-1}$. Тогда для каждых $n+1$ множеств $G_0, \ldots, G_n$ из семейства $\mathcal{G}$, согласно a^0, имеем $\mu\left(\bigcup_0^n G_i\right) \leqslant \sum_0^n \mu(G_i) < 1$, откуда $\bigcup_0^n G_i \neq R^n$ и $\bigcap_0^n G_i' \neq \varnothing$. (Аналогичное утверждение тривиально, если $\mathcal{G}$ содержит меньше $n+1$ множеств.) Из теоремы Хелли следует, что каждое конечное подсемейство семейства $\{G' : G \in \mathcal{G}\}$ имеет непустое пересечение. Для фигурирующего в условии c^0 множества B легко выбрать конечное подсемейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$, для

которого $\bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F'$ ограничено и содержит B. При каждом $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \subset R^n \setminus \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F' \subset R^n \setminus B$, откуда, согласно b^0 и c^0, $\mu(F) \leqslant \mu(R^n \setminus B) < (n+1)^{-1}$ и, следовательно, $F \in \mathscr{G}$. Таким образом, $\{G' : G \in \mathscr{G}\}$ есть семейство замкнутых множеств со «свойством конечного пересечения», и каждое множество этого семейства пересекает компактное множество $\bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F'$. Поэтому существует точка $x^* \in \bigcap\limits_{G \in \mathscr{G}} G'$, что и завершает доказательство 2.8.

* * * *

Из восьми приведенных нами примеров видно, что теорема Хелли — не только один из интереснейших результатов, но и один из наиболее сильных инструментов при изучении выпуклых конечномерных объектов. О других применениях теоремы Хелли см. Яглом и Болтянский [1], Радемахер и Шёнберг [1], Хадвигер и Дебруннер [1], [3], а также некоторые другие из указанных ниже книг и статей[1]).

Теорема 2.1 принадлежит Винченцини [2] и Кли [2], родственный результат — Эдельштейну [1]. Эта теорема представляет собой обобщение теоремы Хелли, которая получается из 2.1, если C состоит из одной точки и отношение r означает «пересекает» или «содержится в». Для различных задач о покрытии полезен вариант теоремы 2.1, где семейство $\mathscr{K}$ состоит из одноточечных множеств. (См. 2.6 и 6.2.)

Результат 2.2 принадлежит Сантало [2]; он рассматривался также Радемахером и Шёнбергом [1]. Сходным образом теорема Хелли для R^n ведет к следующей «теореме о приближении» Карлина и Шепли [1]: Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — вещественнозначные функции, заданные на линейном пространстве E; $x_1, \ldots, x_m$ — точки E; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — вещественные

[1]) См. также Валентин [10]. — *Прим. ред.*

числа; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — неотрицательные вещественные числа. Тогда существование линейной комбинации φ функций φ_i, которая приближает каждую точку (x_i, α_i) с точностью до ε_i (т. е. $|\varphi x_i - \alpha_i| \leqslant \varepsilon_i$), гарантируется существованием такой линейной комбинации для каждой из $n+1$ точек (x_i, α_i). Та же работа Карлина и Шепли содержит результат, подобный 2.3. (О других аппроксимационных теоремах, получающихся с помощью теоремы Хелли, см. Шнирельман [1][1]).)

Теорема 2.4 принадлежит Кирхбергеру [1], а приведенное нами доказательство — Радемахеру и Шёнбергу [1]. (См. также Шимрат [1].) В первом ее доказательстве не использовалась теорема Хелли, и оно занимало около 24 страниц!

Теорема 2.5 принадлежит М. А. Красносельскому [1], а родственные ей результаты — Мольнару [5], Валентину [8] и Робкину и Валентину [1][2]).

Теорема 2.6 принадлежит Юнгу [1][3]). Первое из приведенных нами доказательств в основном представляет собой усовершенствованное Гастином [2] доказательство Верблюнского [1]. Блюменталь и Валин [1], видимо, первыми применили теорему Хелли к задачам этого рода[4]). Такие задачи

---

[1]) Замечательная работа Шнирельман [1] явилась, видимо, первым исследованием, связавшим вопросы теории приближения функций с теоремой Хелли и теорией выпуклых тел; впоследствии эта тематика получила весьма широкое развитие. — *Прим. ред.*

[2]) См. обзор относящихся сюда результатов в книге Валентин [10]. — *Прим. ред.*

[3]) В последнее время результаты типа теоремы Юнга (см. также § 6 ниже) привлекают серьезный интерес также в связи с задачами приближения функций (ср., например, Бердышев [1]; совсем в другой связи см. Тиман [1]). — *Прим. ред.*

[4]) Как курьез и для иллюстрации простоты излагаемых тут соображений отметим следующий факт: когда в 1941 г. (год появления работы Блюменталь и Валин [1]) на VII математической олимпиаде московских школьников была предложена задача, равносильная теореме Юнга для E^2, один из учащихся (М. Бонгард) решил ее сведением к незнакомой автору решения теореме Хелли (которую он тут же доказал для случая, когда все выпуклые множества суть круги). — *Прим. ред.*

будут более подробно разобраны в § 6. Теорема Каратеодори была использована Эглстоном [3].

Теорема 2.7 доказана Минковским [1] для $n=2$ и $n=3$ и в общем случае Радоном [1]. Однако эти авторы доказали больше: что именно центр тяжести тела C обладает требуемым свойством. Приведенное нами доказательство, использующее теорему Хелли, по-видимому, принадлежит Яглому и Болтянскому [1]. Грюнбаум ([16], § 6) рассматривает этот и связанные с ним вопросы в своем обсуждении меры симметрии Минковского.

Теорема 2.8 установлена Нейманом [1] для R^2 при более жестких предположениях относительно μ. Приведенное нами доказательство есть усовершенствование рассуждения Радо [1]. Грюнбаум [13] дал другое доказательство, основанное на теореме Хелли; однако для законности его рассуждений распределение массы должно предполагаться непрерывным. Дополнительные сведения о родственных результатах см. Грюнбаум [16].

§ 3. Теоремы Каратеодори и Радона

Мы уже говорили о тесной связи между теоремами Каратеодори, Хелли и Радона. Для иллюстрации приведем еще вывод теоремы Каратеодори из теоремы Радона. Рассмотрим множество $X \subset R^n$ и точку $y \in \operatorname{conv} X$. Найдутся такие точки x_i из X и положительные числа α_i, что $\sum_1^m \alpha_i = 1$, $\sum_1^m \alpha_i x_i = y$ и y не может быть представлено выпуклой комбинацией менее чем m точек из X. Допустим, что $m \geqslant n+2$. Тогда по теореме Радона существуют такие числа $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (причем не все они равны нулю), что $\sum_1^m \beta_i = 0$, $\sum_1^m \beta_i x_i = 0$. Пусть $V = \{i : \beta_i < 0\}$ и $j \in V$ таково, что

$\dfrac{\alpha_j}{\beta_j} \geqslant \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$ для всех $i \in V$. Тогда

$$y = \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha_i + \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\beta_i\right] x_i,$$

где все коэффициенты $\geqslant 0$, их сумма равна 1, а коэффициент при x_j равен 0. Значит y является выпуклой комбинацией $m-1$ точек из X. Противоречие показывает, что $m \leqslant n+1$ — и теорема Каратеодори доказана.

Доказательство теоремы Радона дал Марков [1], а доказательство теоремы Каратеодори — сам Каратеодори [1], Штейниц [1], Ремез [1], Боненблуст, Карлин и Шепли [1], Эглстон [3], Птак [2] и Шерк [1]. Относительно уточнений и родственных вопросов см. Гейер и Рей [1], Калман [1], Моцкин [4]—[6], Моцкин и Страус [1], [2], Вислер [1], Неутс [1], а также некоторые другие из указываемых далее работ.

Теорема Каратеодори имеет много интересных приложений (например: 2.6; 4.5; 6.8). Птак [1] применяет теорему Каратеодори в изящном доказательстве теоремы Хаара о единственности наилучших приближений. Другие приложения к теории приближения функций можно найти у Ремеза [1], Радемахера и Шёнберга [1]; Мэрхьюбера [1] и Моцкина [5]; см. также Шнирельман [1] [1]).

Приведем особенно простое и полезное следствие из теоремы Каратеодори.

3.1. *В R^n выпуклая оболочка компактного множества компактна.*

Доказательство. Пусть X — компактное подмножество пространства R^n и A — множество всех

---

[1]) Ср. также Гаркави [1], [2], Зуховицкий [1], Ривлин и Шапиро [1], Шашкин [1]. — *Прим. ред.*

точек $\alpha := (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in R^{n+1}$, для которых $\sum\limits_0^n \alpha_i = 1$ и все $\alpha_i \geqslant 0$. Для каждой точки

$$(\alpha, x) := ((\alpha_0, \ldots, \alpha_n), (x_0, \ldots, x_n)) \in A \times X^{n+1}$$

положим $f(\alpha, x) := \sum\limits_0^n \alpha_i x_i$. Поскольку отображение f непрерывно, а $A \times X^{n+1}$ компактно, то $f(A \times X^{n+1})$ тоже компактно. Но по теореме Каратеодори $f(A \times X^{n+1}) = \operatorname{conv} X$.

Следующий результат принадлежит в основном Штейницу [1] и доказывался (также в различных формах) Динешем и Мак-Коем [1], Робинсоном [2], Гастином [1], Гейлом [1] и другими. Приведенное ниже доказательство, использующее теорему Каратеодори, принадлежит Валентину и Грюнбауму.

3.2. *Если y — внутренняя точка выпуклой оболочки множества $X \subset R^n$, то y является также внутренней точкой выпуклой оболочки некоторого подмножества, состоящего из $2n$ или менее точек множества X.*

Доказательство. Для упрощения записи можно, не теряя общности, предположить, что y есть начало координат 0. Если $0 \in \operatorname{int} \operatorname{conv} X$, то, очевидно, найдется такое конечное подмножество Y выпуклой оболочки X, что $0 \in \operatorname{int} \operatorname{conv} Y$. Отсюда следует существование такого конечного множества $V \subset X$, что $0 \in \operatorname{int} \operatorname{conv} V$. Обозначим через J множество всех линейных комбинаций из $n-1$ или менее точек множества V. Ясно, что $J \neq R^n$; потому найдется проходящая через 0 прямая L, для которой $L \cap J = \{0\}$. Пусть w_1 и w_2 — точки прямой L, граничные для $\operatorname{conv} V$, и пусть H_i — опорная гиперплоскость к множеству $\operatorname{conv} V$ в точке w_i. Ясно, что $0 \in (w_1, w_2)$ и $w_i \in \operatorname{conv}(V \cap H_i)$. В силу теоремы Каратеодори и выбора прямой L точка w_i может быть представлена как выпуклая комбинация n точек $v_1^i, \ldots, v_n^i$ пересечения $V \cap H_i$ и не может быть представлена как линейная

комбинация меньше чем n точек из V. Отсюда следует, что w_i является внутренней точкой множества $\operatorname{conv}\{v_1^i, \ldots, v_n^i\}$ на гиперплоскости H_i и, так как $0 \in (w_1, w_2)$, имеем $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{v_1^1, \ldots, v_n^1, v_1^2, \ldots, v_n^2\}$, что завершает доказательство.

Радемахер и Шёнберг [1] выводят из теоремы Штейница результат, родственный теореме 2.4 Кирхбергера [1] [1]) [1]).

В недавней работе Бониса и Кли [1] теоремы Каратеодори и Штейница трактуются как частные случаи единого результата. Для подмножества Z пространства R^n и целого j, находящегося между 0 и n, определим *j-внутренность* $\operatorname{int}_j Z$ как множество таких точек y, что для некоторой j-мерной плоскости $F \subset R^n$ точка y является на плоскости F внутренней точкой пересечения $Z \cap F$. В частности, $\operatorname{int}_0 Z = Z$ и $\operatorname{int}_n Z = \operatorname{int} Z$. Теорема Бониса и Кли состоит в следующем:

3.3. *Если $X \subset R^n$ и $y \in \operatorname{int}_j \operatorname{conv} X$, то $y \in \operatorname{int}_j \operatorname{conv} Y$ для некоторого множества Y, состоящего из не более чем* $\max\{2j, n+1\}$ *точек множества X.* [2]).

Обозначим теперь для каждого натурального числа j и каждого множества X в линейном пространстве через $H_j(X)$ множество всех выпуклых комбинаций из j или менее элементов множества X. Тогда $\operatorname{conv} X = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j(X)$. С другой стороны, выпуклая оболочка $\operatorname{conv} X$ может быть получена итерацией операции H_j при фиксированном $j > 1$. Это значит, что $\operatorname{conv} X = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_j^i(X)$, где $H_j^1(X) := H_j(X)$ и (при $i > 1$) $H_j^i(X) := H_j(H_j^{i-1}(X))$. Естественно спросить, сколько раз надо повторять операцию H_j, чтобы получить выпуклую оболочку множества в R^n. В случае $j \geqslant n+1$ вопрос решается теоремой Каратеодори. Слу-

---

[1]) Напоминаем читателю, что сноски вида [1]), [2]) и т. д. относятся к примечаниям и дополнениям в конце книги (стр. 125 и далее). — *Прим. ред.*

чай $j=2$ рассмотрен Брунном [1], а в последующие годы — некоторыми другими авторами (Ельмслев [1]; Страшевич [1]; Боннезен и Фенхель [1]; Абе, Кубота, Ионегути [1]). Однако вопрос становится тривиальным (в связи с теоремой Каратеодори) ввиду следующего почти очевидного факта:

3.4. $H_j(H_k(X)) = H_{jk}(X)$.

Из этого следует (как замечено Бонисом и Кли [1]), что если $X \subset R^n$ и $j_1 j_2 \ldots j_n \geqslant n+1$, то $H_{j_1}(H_{j_2} \ldots (H_{j_n}(X)) \ldots) = \operatorname{conv} X$; обратно, если X есть множество всех вершин n-мерного симплекса и $j_1 j_2 \ldots j_n \leqslant n$, то $H_{j_1}\left(H_{j_2} \ldots \left(H_{j_n}(X)\right) \ldots\right) \neq \operatorname{conv} X$. (Аналогичные задачи об образовании аффинных оболочек значительно сложнее; см. Кли [8].)

Теорема Каратеодори является точной в том смысле, что если число $n+1$ уменьшить, то теорема уже не будет верна для *всех* множеств $X \subset R^n$. Однако теорема может быть усилена, если ограничиться рассмотрением специальных классов подмножеств из R^n, например связными (3.5) или обладающими определенной симметрией (3.6). Множество в R^n называется *выпукло связным* при условии, что в R^n нет такой гиперплоскости H, что множество не пересекается с H, но пересекает оба определяемых ею открытых полупространства. Результаты Фенхеля [1], Стёлинга [1], Банта [1], Ханнера и Родстрёма [1] могут быть сформулированы следующим образом:

3.5. *Пусть множество* $X \subset R^n$ *есть объединение* n *связных множеств или компактно и является объединением* n *выпукло связных множеств. Тогда каждая точка из* conv X *есть выпуклая комбинация* n *или менее точек множества* X.[3])

Как отмечено Ханнером и Родстрёмом [1], утверждение 3.5 может оказаться неверным даже в R^2, если множество X предполагается только выпукло связным и ограниченным *или* замкнутым, но не компактным. Для $X \subset R^2$ рассмотрим множество

$X^{\Delta} := H_2(X) \setminus H_1(X)$, состоящее из тех точек, принадлежащих $\operatorname{conv} X$, которые не принадлежат ни X, ни отрезкам, соединяющим пары точек из X. Тогда для ограниченных выпукло связных подмножеств $X \subset R^2$ множество X^{Δ} может иметь любую конечную мощность, может быть счетным или даже несчетным (последнее доказано Эрдёшем с помощью полной упорядоченности). Легко построить замкнутые выпукло связные подмножества $X \subset R^2$, для которых X^{Δ} состоит из одной или двух точек; Данцер дал сложный пример, когда X^{Δ} состоит из трех точек. Имеются ли другие возможности?

Следующий результат Фенхеля [4] сводится к теореме Каратеодори при $m=n$:

3.6. *Пусть G — некоторая группа линейных изометрических отображений пространства E^n на самого себя, m — размерность множества M всех G-инвариантных точек E^n и X — подмножество E^n, которое отображается само на себя каждым преобразованием из группы G. Тогда каждая точка из $M \cap \operatorname{conv} X$ может быть получена как точка $\operatorname{conv} \bigcup_{g \in G} gY$ для какого-нибудь множества Y, состоящего из не более чем $m+1$ точек множества X.* [4]).

Было бы интересно знать, сколь может быть усилено утверждение 3.3, если на множество X налагать дополнительные ограничения. Из 3.4 и 3.5 очевидно, что $\operatorname{conv} X = H_j^i(X)$, когда X удовлетворяет условиям 3.5 и $j^i \geqslant n-1$.

Обратимся теперь к некоторым результатам и проблемам, примыкающим к теореме Радона [1]) [5]). Для каждой пары натуральных чисел n и r обозначим через $f(n, r)$ наименьшее k, при котором каждое множество из k точек в R^n может быть разбито на r

---

[1]) Относительно доказательства теоремы Радона см. также Х у д я к о в [1] и К о с м а к [1]; о применениях теоремы Радона в функциональном анализе см., например, Б р о з о в с к и й [1], Ш а ш к и н [3], [4]; в связи с применениями теорем Каратеодори и Радона в функциональном анализе см., скажем, Ш а ш к и н [2]. — *Прим. ред.*

попарно непересекающихся множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку. Из теоремы Радона следует, что $f(n, 2)=n+2$. Функцию f изучали Радо [6], Берч [1] и Тверберг [1]. Берч предположил, а Тверберг доказал, что в общем случае выполняется следующее равенство:

3.7. $f(n, r)=(n+1)r-n.$

По поводу обобщений и родственных результатов см. Рей [3].

Некоторые другие задачи затрагиваются в работе Радо [6]. Приведем связанный с одной из них недавний результат Берча. Для каждых натуральных чисел n и r при $r<n$ обозначим через $b(n, r)$ наименьшее число k (если оно существует), при котором для каждого множества из k точек в R^n существует r-мерная плоскость, которая содержит $r+1$ из этих точек и пересекает выпуклую оболочку остальных точек. Результаты и доказательство Берча (ранее не опубликованные) состоят в следующем:

3.8. *При* $n\leqslant 2r+1$ *имеем* $b(n, r)=n+2$; *при* $n\geqslant 2r+2$ *число* $b(n, r)$ *не существует.*

Доказательство. Сначала предположим, что $n\leqslant 2r+1$ и $x_1, \ldots, x_{n+2}$ — точки из R^n. По теореме Радона найдутся такие вещественные числа α_i (не все равные нулю), сумма которых равна нулю, что $\sum_1^{n+2}\alpha_i x_i=0$. Не меньше чем $n-r+1$ из чисел α_i имеют один знак; поэтому мы можем предположить, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r+1}$ все неотрицательные и по крайней мере одно из них положительно. При $s:=\sum_1^{n-r+1}\alpha_i>0$ получим точку

$$\sum_{i=1}^{n-r+1}\left(\frac{\alpha_i}{s}\right)x_i=\sum_{j=n-r+2}^{n+2}\left(-\frac{\alpha_j}{s}\right)x_j,$$

которая одновременно принадлежит множеству $\operatorname{conv}\{x_i\colon 1\leqslant i\leqslant n-r+1\}$ и наименьшей по размер-

ности плоскости, содержащей $\{x_j : n-r+2 \leqslant j \leqslant n+2\}$. Отсюда следует, что $b(n, r) \leqslant n+2$, а пример n-мерного симплекса показывает, что $b(n, r) > n+1$.

Для случая $n \geqslant 2r+2$ достаточно проверить, что если

$$A := \{(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^n) : \alpha > 0\} \subset R^n,$$

то A обладает тем замечательным свойством, что для каждых $r+1$ точек $x_0, \ldots, x_r$ из A r-плоскость (при $r \leqslant \frac{n}{2} - 1\Big)$, проходящая через $\{x_0, \ldots, x_r\}$, не пересекает выпуклую оболочку множества $A \diagdown \{x_0, \ldots, x_r\}$.

Пример, подобный только что приведенному, впервые был дан Каратеодори [2]. Он установил следующий факт, позднее переоткрытый Гейлом [3] и Моцкином [3]:

3.9. *При $2 \leqslant m \leqslant k$ и $2m \leqslant n$ в пространстве R^n найдется такой выпуклый многогранник с k вершинами, у которого каждые m вершин определяют его грань.*

Дальнейшие сведения о *полиэдральных графах* см. в работах Гейл [5], Грюнбаум и Моцкин [2] и других, в них упоминаемых[1]); о применениях 3.9 см. 8.2+.

Мы должны еще упомянуть интересную нерешенную задачу о выборе в конечном множестве подмножеств с *непересекающимися* выпуклыми оболочками. Для натуральных чисел $2 \leqslant n < r$ обозначим через $h(n, r)$ наименьшее число k, при котором для каждого множества из k точек общего положения в R^n существует r-точечное множество X, которое *независимо выпукло* (ни одна точка из X не принадлежит выпуклой оболочке остальных). Очевидно, что $h(n, n+1) = n+1$ и легко проверить, что $h(n, n+2) =$

---

[1]) См. также (и даже в первую очередь) обстоятельную монографию Грюнбаум [22], содержащую весьма обширный список литературы. — *Прим. ред.*

$=n+3$. Эрдёш и Секереш [1] ссылаются на доказательство Макаи и Тураном того факта, что $h(2, 5)=9$, и устанавливают оценки сверху для $h(2, r)$, которые далеки от их предположения, что $h(2, r)=2^{r-2}+1$. В более поздней работе (Эрдёш и Секереш [2]) они доказывают, что $h(2, r) \geqslant 2^{r-2}$. Обсуждение проблемы Эрдёша — Секереша содержится в работе Райзер [1]; по поводу связанных с ней теорем типа Хелли см. Грюнбаум [22] (стр. 22 и 126), Моцкин [7], [8], Моцкин и О'Нейл [1], Дерри [1].

Доказательство Де-Сантиса [1] его обобщения теоремы Хелли базируется на обобщении теоремы Радона, которое применяется к множествам плоскостей в линейном пространстве. Мы несколько обобщим последний результат. Начнем с дополнительных обозначений. Для каждой конечной или бесконечной неубывающей последовательности целых чисел r_α, $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots$, обозначим через $\xi(r_\alpha)$ наименьшее целое k, при котором выполняется следующее требование: если F_α — любая последовательность плоскостей в вещественном линейном пространстве, причем каждая плоскость F_i имеет коразмерность r_i (т. е. размерность $n - r_i$), то множество всех индексов i может быть разбито на дополняющие друг друга подмножества I и J так, что пересечение

$$\left(\operatorname{conv} \bigcup_{i \in I} F_i\right) \cap \left(\operatorname{conv} \bigcup_{j \in J} F_j\right)$$

содержит плоскость коразмерности k. Если такого k не существует, считаем $\xi(r_\alpha)=\infty$. Следующая теорема является небольшим усовершенствованием предложенного Де-Сантисом обобщения теоремы Радона:

3.10. *Если m есть наименьшее целое, для которого $r_m < m$, то $\xi(r_\alpha)=r_{m+1}$. Если такого m нет, то $\xi(r_\alpha)=\infty$.*

Может быть сразу не очевидно, что 3.10 является обобщением теоремы Радона. Чтобы пояснить связь, рассмотрим последовательность $x_1, \ldots, x_k$ точек из R^n.

Каждая точка может рассматриваться как плоскость коразмерности n, так что для соответствующей последовательности $r_1, \ldots, r_k$ всегда $r_i = n$. Если $k \geqslant n+1$, то m (в утверждении 3.10) равно $n+1$, а поэтому $\xi(r_\alpha) = r_{n+2}$ при условии, что r_{n+2} определено; в противном случае $\xi(r_\alpha) = \infty$. Отсюда следует, что при $k \geqslant n+2$ множество индексов $\{1, \ldots, k\}$ может быть разбито на дополняющие друг друга подмножества I и J так, что пересечение $\operatorname{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \operatorname{conv}\{x_j : j \in J\}$ содержит плоскость коразмерности n; это значит, что пересечение непусто.

Комбинируя идеи предложений 3.10 и 3.8, можно получить дальнейшие обобщения теоремы Радона. Однако это уже имеет только косвенный интерес [6]).

§ 4. Обобщения теоремы Хелли

Этот параграф содержит некоторые обобщения теоремы Хелли и другие результаты, связанные с этой теоремой. Все они, за исключением нескольких замечаний, относятся к пространству R^n. (По поводу обобщений на другие пространства см. § 9.) В конце параграфа мы сформулируем некоторые проблемы, которые могут указать целесообразное направление поисков в этой области. Разделение материала между § 3 и § 4 несколько искусственно ввиду тесной связи между теоремой Хелли и теоремами Каратеодори и Радона. Все же оно представляется оправданным, поскольку сами направления исследования отличаются по характеру и ведут к различным обобщениям.

Теорема Хелли может рассматриваться как некоторое утверждение о «структуре» определенных семейств $\mathscr{K}$ выпуклых множеств в R^n, для которых $\pi\mathscr{K} = \varnothing$. Действительно, в ней утверждается, что если $\mathscr{K}$ конечно (или все множества из $\mathscr{K}$ компактны), то $\pi\mathscr{K} = \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует подсемейство $\mathscr{F}$, состоящее из не более чем $n+1$ множеств семейства $\mathscr{K}$, для которого $\pi\mathscr{F} = \varnothing$. Это наво-

дит на мысль о поисках теорем, утверждающих что-либо о структуре *любого* семейства $\mathcal{K}$ выпуклых множеств в R^n, для которого $\pi\mathcal{K}=\varnothing$, причем таких, из которых теорема Хелли получалась бы в качестве следствия. Известные частные результаты в этом направлении собраны в сообщении[1]) Кли [6]; они ближе к бесконечномерным рассмотрениям. Некоторые статьи, примыкающие к исследованиям этого типа, включены в наш список литературы (Гейл и Кли [1], Карлин и Шепли [1], Кли [2], [4], Радо [5], Сандгрен [1] и недавние работы Рокфеллер [1], [2], содержащие перенесение теоремы Хелли на разные системы неограниченных выпуклых множеств).

Теорема Хелли устанавливает для некоторых семейств $\mathcal{K}$ выпуклых множеств существование точки x, общей всем множествам из $\mathcal{K}$. Множество $\{x\}$ может рассматриваться как отвечающая случаю $j=0$ специализация одного из следующих шести объектов:

$$\text{как}\left\{\begin{array}{l} j\text{-мерное выпуклое множество}\\ j\text{-мерная плоскость}\\ (j+1)\text{-точечное множество}\end{array}\right\},\ \text{которое}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{содержится в}\\ \text{пересекает}\end{array}\right\}\ \text{каждое множество из}\ \mathcal{K}.$$

В каждом из шести случаев можно ставить вопрос об наложенных на семейство $\mathcal{K}$ условиях, которые и при $j>0$ обеспечивают существование такого рода объектов. Два из этих шести вопросов являются лишними. Действительно, j-мерное выпуклое множество, пересекающее все множества семейства $\mathcal{K}$, существует тогда и только тогда, когда существует j-мерная плоскость, пересекающая все множества из $\mathcal{K}$; аналогично, поскольку все множества из $\mathcal{K}$ выпуклы, $(j+1)$-точечное множество, которое содержится во всех множествах семейства $\mathcal{K}$, существует (при $j\geqslant 1$) тогда и только тогда, когда существует

[1]) На том же симпозиуме, для которого был подготовлен и настоящий обзор. — *Прим. ред.*

1-мерное выпуклое множество [1]), которое содержится во всех множествах из $\mathscr{K}$. Четыре оставшиеся вопроса приводят к обобщениям теоремы Хелли. Самыми недавними из них являются следующие результаты Грюнбаума [18]:

4.1. *Пусть* $g(n, 0)=n+1$, $g(n, 1)=2n$, $g(n, j)=2n-j$ *при* $1<j<n$ *и* $g(n, n)=n+1$. *Если* $\mathscr{K}$ — *конечное семейство из не менее чем* $g(n, j)$ *выпуклых множеств в* R^n *и каждые* $g(n, j)$ *множеств семейства* $\mathscr{K}$ *имеют не менее чем* j*-мерное пересечение, то пересечение* $\pi\mathscr{K}$ *имеет размерность, не меньшую* j.

Если $j=0$, то это просто теорема Хелли. Примеры показывают, что при каждом выборе j и n (при $0\leqslant j\leqslant n$) наименьшим целым числом, обладающим указанным свойством, является $g(n, j)$.

Следующий результат принадлежит Де-Сантису [1]:

4.2. *Если* $\mathscr{K}$ — *конечное семейство из не менее чем* $n+1-j$ *выпуклых подмножеств в* R^n *и пересечение каждых* $n+1-j$ *множеств семейства* $\mathscr{K}$ *содержит* j*-мерную плоскость, то* $\pi\mathscr{K}$ *также содержит* j*-мерную плоскость.*

Это утверждение превращается в теорему Хелли при $j=0$. Число $n+1-j$ — наименьшее, обладающее указанным свойством. Доказательство Де-Сантиса базируется на аналоге теоремы Радона (см. 3.10); Валентин [9] дал доказательство с использованием теории двойственности. Как отметил Де-Сантис, его теореме может быть придана следующая форма, не зависящая от числа измерений пространства:

Пусть $\mathscr{K}$ — *конечное семейство выпуклых множеств в вещественном линейном пространстве* E (*которое может быть и бесконечномерным*), *и пусть при этом пересечение каждых* j *множеств из* $\mathscr{K}$ *содержит*

[1]) То есть отрезок. — *Прим. ред.*

плоскость коразмерности $<j$ в E. Тогда $\pi\mathcal{K}$ также содержит плоскость коразмерности $<j$.

Теоремы 4.1 и 4.2 являются прямым обобщением теоремы Хелли, так как в каждой из них свойство пересечения всего семейства $\mathcal{K}$ следует из предположения о наличии того же свойства у некоторых подсемейств $\mathcal{K}$. Теперь, обращаясь к оставшимся из четырех упомянутых выше вопросов, предположим, что мы хотим при некотором $j \geqslant 1$ получить j-мерную плоскость, пересекающую все множества семейства $\mathcal{K}$. Это — задача об общей трансверсали, рассматриваемая в § 5. Простые примеры показывают, что существование общей трансверсали у всех множеств из $\mathcal{K}$ не гарантируется только предположением ее существования у некоторых подсемейств $\mathcal{K}$. Действительно, для каждого $m \geqslant 3$ на плоскости найдется m таких равных отрезков, что каждые $m-1$ из них имеют общую секущую прямую, но никакая прямая не пересекает все m отрезков (Сантало [1]). (Относительно других примеров см. работы, указываемые в § 5.) Единственным настоящим обобщением теоремы Хелли в вопросе существования общих трансверсалей является следующий результат Хорна [1] и Кли [1]:

4.3. *Для целых $1 \leqslant j \leqslant n+1$ и семейства $\mathcal{K}$, состоящего из не менее чем j компактных выпуклых множеств в R^n, следующие три утверждения эквивалентны:*

a^0. *Каждые j множеств семейства $\mathcal{K}$ имеют общую точку;*

b^0. *Каждая плоскость коразмерности $j-1$ в R^n имеет транслят, пересекающий все множества из $\mathcal{K}$;*

c^0. *Каждая плоскость коразмерности $j-2$ в R^n принадлежит плоскости коразмерности $j-1$, пересекающей все множества из $\mathcal{K}$.*

Двумерный случай рассматривался раньше Хорном и Валентином [1]. В общем случае Хорн [1] (а позднее — Карлин и Шепли [1]) доказали,

что условие a^0 влечет за собой c^0; остальное здесь принадлежит Кли [1]. Другие доказательства были даны Хадвигером [4] и Валентином [8]. Доказательство Кли основано на том, что если каждые j множеств имеют общую точку, но нет точки, общей всем $j+1$ множествам, то в R^n возникает своего рода «дыра», «окруженная» $j+1$ открытыми выпуклыми множествами $C_0, \ldots, C_j$:

Найдется такая плоскость F коразмерности j, что сама плоскость F не пересекает множество $\bigcup\limits_0^j C_i$, но каждая полуплоскость коразмерности $j-1$, ограниченная плоскостью F, обязательно пересекает это множество.

Для $j=n+1$ каждое из приведенных условий b^0 и c^0 гарантирует, что $\pi\mathscr{K} \neq \varnothing$ и тем самым дает теорему Хелли. При $j=2=n$ теорема гарантирует, что если есть общая точка у каждых двух множеств семейства $\mathscr{K}$ компактных выпуклых множеств в R^2, то каждая прямая $L \subset R^2$ параллельна некоторой прямой L', пересекающей все множества $\mathscr{K}$, и через каждую точку $x \in R^2$ можно провести прямую X, пересекающую все множества $\mathscr{K}$ (см. рис. 6). Рассматривая прямые, параллельные данной, как пучок прямых, проходящих через некоторую «бесконечно удаленную точку», мы видим, что вещественное проективное пространство является естественным фоном для теоремы 4.3. К этой теореме можно также подойти, используя понятие сферической выпуклости (Хорн [1]). (См. в 9.1 и 9.2 свойства сферической и проективной выпуклости.)

Теперь рассмотрим четвертый из упомянутых выше вопросов: какие условия, наложенные на семейство $\mathscr{K}$ выпуклых множеств в R^n, будут (при $j>1$) гарантировать существование j-точечного множества, пересекающего каждое множество из $\mathscr{K}$? (См. разбор задач типа Галая в 7.4+ и ближе к концу этого параграфа.) Удобно использовать терминологию Хадвигера и Дебруннера [2], согласно которой *j-разбиением* семейства $\mathscr{K}$ называется разбиение $\mathscr{K}$ на j

подсемейств, каждое из которых имеет непустое пересечение. При некоторых жестких ограничениях геометрического характера, наложенных на $\mathscr{K}$, существование j-разбиения $\mathscr{K}$ гарантировано существованием

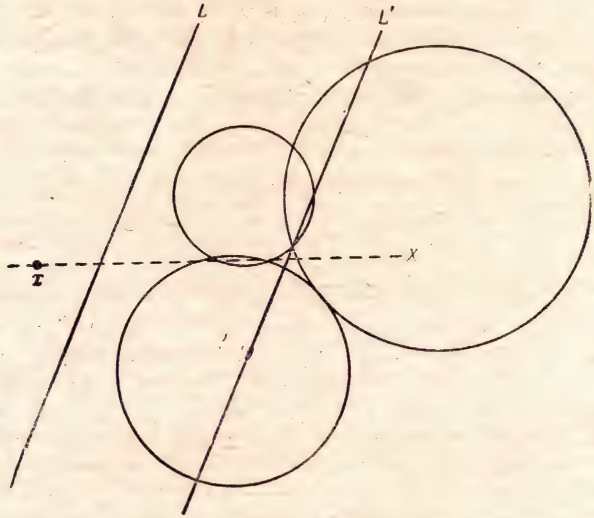

Рис. 6.

разбиений некоторых подсемейств $\mathscr{K}$ (см. § 7). Однако пример Хадвигера и Дебруннера [3] показывает, что для сколь угодно больших целых m существует такое семейство $\mathscr{K}$ из m плоских выпуклых множеств, что в $\mathscr{K}$ каждое собственное подсемейство имеет 2-разбиение, а само $\mathscr{K}$ такого разбиения не имеет. Представляется вероятным, что такое семейство существует при каждом $m \geqslant 3$. Хадвигер и Дебруннер [2] подходят к задаче о j-разбиениях, используя следующую теорему:

4.4. *При $r \geqslant j(n-1)+2$ существование j-разбиения у конечного семейства $\mathscr{K}$ выпуклых множеств в R^n следует из условия о том, что среди каждых $r+j-1$ множеств семейства $\mathscr{K}$ некоторые r имеют общую*

точку. То же условие не влечет за собой существование $(j-1)$*-разбиения.*

Если $j=1$ и $r=n+1$, то это утверждение сводится к теореме Хелли. Результат может быть сформулирован несколько иначе: пусть r, s, n — целые числа; через $J(r, s, n)$ обозначим наименьшее целое j, такое, что каждое конечное семейство $\mathscr{K}$ выпуклых множеств в R^n допускает j-разбиение, если $\mathscr{K}$ обладает тем свойством, что среди любых s множеств семейства $\mathscr{K}$ найдутся r, имеющие общую точку. Из теоремы 4.4 следует равенство

$$J(r, s, n)=s-r+1 \quad \text{при} \quad r \leqslant s \text{ и } nr \geqslant (n-1)s+n+1.$$

Как замечено Хадвигером и Дебруннером [2], $J(r, s, n)=\infty$ при $s \leqslant n$ и всегда $J(r, s, n) \geqslant s-r+1$. Задача полного определения чисел $J(r, s, n)$ остается нерешенной; теорема 4.4 отвечает на этот вопрос только для случая $n=1$ и не имеет силы уже в случае $n=2$. Приведенный выше результат дает только $J(4, 3, 2) \geqslant 2$, в то время как примеры Данцера (Хадвигер [12], Хадвигер и Дебруннер [3]) и Грюнбаума [9] показывают, что $J(4, 3, 2) \geqslant 3$. Пример Данцера базируется на рассмотрении шести *равных* треугольников, а пример Грюнбаума — девяти *транслятов* произвольного центрально симметричного строго выпуклого тела в R^2. Более поздняя конструкция Вегнера [1] показывает, что $J(4, 3, 2)=\infty$. (По поводу обобщений функции J см. 7.4+.)

Другое обобщение теоремы Хелли возникает в связи с теорией игр. Оно принадлежит Боненблюсту, Карлину и Шепли [1], а различные приложения — Карлину и Шепли [1].

4.5. *Пусть C — компактное выпуклое множество в R^n и Φ — конечное семейство таких непрерывных выпуклых функций в C, что для каждого $x \in C$ найдется функция $\varphi \in \Phi$, для которой $\varphi(x)>0$. Тогда существуют положительные числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_j$, где $j \leqslant n$*

и функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_j$ *из* Φ, *для которых* $\sum_0^j \alpha_i\varphi_i(x) > 0$ *при всех* $x \in C$.

Чтобы вывести теорему Хелли из 4.5, рассмотрим конечное семейство $\mathscr{K}$ компактных выпуклых множеств в R^n. Пусть C — компактное выпуклое множество, содержащее их объединение; для каждого $K \in \mathscr{K}$ и $x \in C$ положим $\varphi_K(x) := \rho(\{x\}, K)$. Тогда, если пересечение $\pi\mathscr{K}$ пусто, то семейство функций $\Phi := \{\varphi_K : K \in \in \mathscr{K}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.5, и потому найдутся положительные $\alpha_0, \ldots, \alpha_j$ $(j \leqslant n)$, при которых $\sum_0^j \alpha_i\varphi_{K_i}(x) > 0$ для всех $x \in C$. Из этого следует, что $\bigcap_0^j K_j = \varnothing$, т. е. получается теорема Хелли.

Хорошо известная топологическая теорема Кнастера, Куратовского и Мазуркевича [1] влечет за собой одно следствие, элементарное доказательство которого дал Кли [1]:

Если $j+1$ *замкнутых выпуклых множеств в* R^n *имеют выпуклое объединение и каждые* j *из них имеют общую точку, то существует точка, общая им всем.*

Используя этот факт в качестве леммы, Леви [2] получил следующий результат:

4.6. *Пусть* $\mathscr{F}$ — *конечное семейство из не менее чем* n *замкнутых выпуклых множеств в* R^n, *и пусть* $\mathscr{F}$ *обладает следующими двумя свойствами*:

$\mathfrak{A}_{n+1}$: *объединение любых* $n+1$ *множеств семейства* $\mathscr{F}$ *имеет в* R^n *связное дополнение*;

$\mathfrak{J}_n$: *каждые* n *множеств семейства* $\mathscr{F}$ *имеют общую точку.*

Тогда существует точка, общая всем множествам семейства $\mathscr{F}$.

Это утверждение может рассматриваться как обобщение теоремы Хелли, поскольку $\mathfrak{A}_{n+1}$ вытекает (при

$n>1$) из условий ограниченности множеств из $\mathcal{F}$, их выпуклости и наличия у каждых $n+1$ из них общей точки.

Приведенная выше лемма была обобщена в другом направлении Бержем [2] и Гуйла-Ури [1], хотя их результаты формально не влекут за собой теорему Хелли. Не указывая полностью результаты Гуйла-Ури [1], мы сформулируем два наиболее интересных следствия:

4.7. *Пусть $C_1, \ldots, C_m$ — замкнутые выпуклые множества в топологическом линейном пространстве, причем каждые k из этих множеств имеют общую точку (здесь $1 \leqslant k < m$). Если $\bigcup\limits_1^m C_i$ выпукло, то найдутся $k+1$ из этих множеств, имеющие общую точку. Если $k=m-1$ и $\bigcap\limits_1^m C_i=\varnothing$, то каждые $m-1$ из этих множеств имеют общую точку в каждом замкнутом множестве X, для которого $X \cup \bigcup\limits_1^m C_i$ выпукло.*

Вторую часть в 4.7, определяющую «дыру», окруженную множествами, можно сравнить с 4.3+. К результату 4.7 можно подойти также, используя эйлерову характеристику (Хадвигер [5], Кли [7]).

Определим для семейства множеств $\mathcal{F}$ *«число Хелли»* $\alpha(\mathcal{F})$ как наименьшее число k, такое, что любое конечное подсемейство $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ обязательно имеет непустое пересечение $\pi\mathcal{G}\neq\varnothing$, если в нем имеют непустое пересечение $\pi\mathcal{S}\neq\varnothing$ все подсемейства $\mathcal{S}\subset\mathcal{G}$ с $\operatorname{card}\mathcal{S}<k+1$.

Теорема Хелли утверждает, что для семейства $\mathcal{C}^n$ всех выпуклых подмножеств пространства R^n число Хелли $\alpha(\mathcal{C}^n)=n+1$. Понятие числа Хелли особенно удобно для семейств $\mathcal{F}$, которые *«содержат пересечения»* в том смысле, что $\pi\mathcal{G}\in\mathcal{F}$ для всех $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$. Например, Грюнбаум [10] определяет *меру невыпуклости* $\Delta(X)\geqslant 0$ для каждого компактного $X\subset E^n$, причем $\Delta X=0$ характеризует выпуклые множества, а

$\Delta(X)<\infty$ тогда и только тогда, когда X есть объединение конечного семейства попарно непересекающихся компактных выпуклых множеств. Он получает следующий результат:

4.8. *Обозначим при конечном* $\varepsilon \geqslant 0$ *через* $\mathcal{G}(n, \varepsilon)$ *семейство всех компактных множеств* $X \subset E^n$ *с* $\Delta(X) \leqslant \leqslant \varepsilon$. *Тогда семейство* $\mathcal{G}(n, \varepsilon)$ *содержит пересечения и имеет конечное число Хелли.*

Естественно, что $\alpha(\mathcal{G}(n, 0)) = n+1$. Грюнбаум дает оценки для $\alpha(\mathcal{G}(n, \varepsilon))$ и примеры, показывающие невозможность их улучшения в определенных направлениях.

Следующий результат доказан Моцкином [2]:

4.9. *Обозначим через* $\mathcal{M}(n, d)$ *семейство всех тех многообразий в (вещественном) аффинном или проективном n-пространстве, которые определены одним или более алгебраическими уравнениями степени* $\leqslant d$. *Тогда семейство* $\mathcal{M}(n, d)$ *содержит пересечения и* $\alpha(\mathcal{M}(n, d)) = C^n_{n+d}$.

Рассматривая теоремы типа Хелли для различных не содержащих пересечения семейств $\mathcal{F}$, можно перечислить трудности, вызванные тем, что пересечения множеств семейства $\mathcal{F}$ могут иметь более сложную структуру, чем сами множества семейства. Для таких $\mathcal{F}$ может случиться, что число Хелли $\alpha(\mathcal{F})$ бесконечно и что более удобным является понятие *порядка Хелли* $\alpha^0(\mathcal{F})$, определенного как наименьшее число k, такое, что любое подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ обязательно имеет непустое пересечение, *принадлежащее* $\mathcal{F}$, т. е. $\varnothing \neq \pi\mathcal{G} \in \mathcal{F}$, если для всех $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$, где card $\mathcal{S} < k+1$ имеет место $\varnothing \neq \pi\mathcal{S} \in \mathcal{F}$. Заметим, что всегда $\alpha^0(\mathcal{F}) \leqslant \alpha(\mathcal{F})$, причем, если семейство $\mathcal{F} \cup \cup \{\varnothing\}$ содержит пересечения, то $\alpha^0(\mathcal{F}) = \alpha(\mathcal{F})$.

Обозначим теперь через $\mathcal{U}(n, j)$ семейство всех непустых подмножеств R^n, которые являются объединением j или менее непересекающихся компактных выпуклых множеств. Тогда по теореме Хелли $\alpha(\mathcal{U}(n, 1)) = \alpha^0(\mathcal{U}(n, 1)) = n+1$. Пример Моцкина (с исправлениями Сантало [7]; см. также Хад-

вигер и Дебруннер [3]) показывает, что $\alpha(\mathcal{U}(n, 2))=\aleph_0$. В то же время Грюнбаум и Моцкин [1] получили следующий результат:

4.10. *Семейство всех «дуплетов» в E^n имеет порядок Хелли $2n+2$, т. е. $\alpha^0(\mathcal{U}(n, 2))=2n+2$.*

Тот же результат остается справедливым, если в определении $\mathcal{U}(n, j)$ заменить слово «компактные» на слово «открытые», но не будет верным, если это слово просто вычеркнуть. Довольно долго оставалось даже неизвестным, имеет ли в R^2 семейство всех триплетов $\mathcal{U}$ (2, 3) конечный порядок Хелли, однако недавно Ларман [1] доказал, что при $j=3$ и всех n является справедливым и более общее предположение Грюнбаума и Моцкина о том, что $\alpha^0(\mathcal{U}(n, j))=j(n+1)$. Работа Грюнбаум и Моцкин [1] содержит другие теоремы о пересечениях в более отвлеченной постановке с интересными приложениями в теории выпуклости. В частности, они показывают, что если $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств R^n, причем пересечение каждых n множеств семейства $\mathcal{F}$ есть объединение n (или менее) попарно непересекающихся замкнутых выпуклых множеств, то $\pi\mathcal{F}$ тоже является таким объединением. (Это — теорема типа Хелли в смысле, который поясняется ниже.)

Непустое компактное метрическое пространство называется *гомологической клеткой*, если оно гомологически тривиально (ациклично) во всех размерностях. Хелли [2] в своей второй работе о свойствах пересечений использует циклы Вьеториса и гомологии по модулю 2 для доказательства следующего результата:

4.11. *В R^n семейство всех гомологических клеток имеет порядок Хелли $n+1$.*

Комбинаторная форма этого результата приведена на стр. 297 книги Александров и Хопф [1]. В действительности Хелли доказал более сильное утверждение:

Если $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств в R^n, $\pi\mathcal{G}$ — гомологическая клетка для всех подсемейств $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ с $\operatorname{card}\mathcal{G}\leqslant n$ *и* $\pi\mathcal{G}\neq\varnothing$ *при всех* $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ *с* $\operatorname{card}\mathcal{G}=n+1$, *то* $\pi\mathcal{F}$ *тоже является гомологической клеткой.* [7]).

Интересно сопоставить судьбу топологической теоремы Хелли 4.11 и ее частного случая, касающегося пересечения выпуклых множеств. Для геометрической теоремы было найдено много обобщений, вариантов и приложений, в то время как топологическая теорема оставалась почти забытой на протяжении более чем двадцати лет. За исключением работы Хелли [2] и книги Александров и Хопф [1] мы не смогли найти ни одного ее применения, предшествовавшего работе Мольнар [1] от 1956 г.

В R^2 топологическая теорема Хелли применяется к односвязным компактным множествам. Хелли [2] дает элементарное доказательство для этого случая, а Мольнар [1], [2] улучшает ее так:

Семейство из не менее чем трех односвязных компактных множеств в R^2 имеет непустое односвязное пересечение при условии, что каждые два множества этого семейства имеют связное пересечение, а каждые три имеют непустое пересечение [1]).

По поводу дальнейших улучшений этой теоремы см. Хедок [1].

Теперь в метрическом пространстве X обозначим через $\mathcal{H}_n X$ семейство всех гомологических клеток в X, которые могут быть топологически погружены в R^n. Из результата Хелли легко следует, что $\alpha^0(\mathcal{H}_n X)\leqslant$ $\leqslant n+2$, откуда, конечно, $n+1\leqslant\alpha^0(\mathcal{H}_n M^n)\leqslant n+2$ для

---

[1]) Используя приведенные гомологические группы Чеха с коэффициентами из произвольного поля, Берштейн [1] обобщил теорему Мольнара следующим образом:

Если $A_1, \ldots, A_m$ — компактные подмножества n-многообразия M, причем $A_1\cup\ldots\cup A_m\neq M$ и для каждого $k\leqslant n+1$ и для любых $i_1, \ldots, i_k$ множество $A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}$ является $(n-k)$-ацикличным, то каждое объединение пересечений множеств A_i является ∞-ацикличным. В частности, множество $A_1\cap\ldots\cap A_m$ непусто и ∞-ациклично. (Здесь (-1)-ацикличность означает непустоту, а 0-ацикличность означает связность.) См. также Юссила [1].

каждого n-мерного многообразия M^n. Как замечено Мольнаром [3], 2-сфера S^2 является единственным двумерным многообразием, в котором семейство гомологических клеток имеет порядок Хелли, равный 4. В более общем случае очевидно, что $\alpha^0(\mathscr{H}_n S^n)=n+2$, и из другого результата Хелли [2] (см. также стр. 296 книги Александров и Хопф [1]) вытекает, что X содержит гомологическую n-сферу, если только $\alpha^0(\mathscr{H}_n X)=n+2$. (По поводу смежных вопросов см. также Шоош [1] и Мольнар [4].)

Есть много геометрических задач, в которых применение основной теоремы Хелли о пересечении (если оно вообще возможно) может потребовать большой изобретательности, но к которым топологическую теорему Хелли можно применить довольно просто. Это, по-видимому, впервые отметил Грюнбаум [11] в связи с общими трансверсалями (см. § 5). Несомненно, что многие применения топологической теоремы Хелли еще ждут человека, который бы их отыскал.

Эта теорема и другие результаты Хелли [2] тесно связаны с тем фактом, что *если пространство покрыто конечным семейством $\mathscr{F}$ некоторых множеств, все пересечения которых гомологически тривиальны, и все множества из $\mathscr{F}$ замкнуты или все открыты, то пространство гомологически подобно нерву $N\mathscr{F}$ покрытия $\mathscr{F}$.* (Для пояснения формулировки одного из вариантов этого результата см. Лере [1], стр. 138, или Борель [1], § 4 гл. IV. Смежный результат об эйлеровых характеристиках дан Борсуком [3]; имеются и сходные результаты, использующие гомотопические типы (Борсук [2], Вейль [1]).) В качестве иллюстрации выведем из этих результатов геометрическую теорему Хелли и тот факт, что каждое подмножество R^n гомологически тривиально во всех измерениях $\geqslant n$. Пусть $\mathscr{F}$ — конечное семейство из не менее чем $n+1$ компактных выпуклых множеств в R^n, причем каждые $n+1$ из них имеют общую точку. Предположим, что $\pi\mathscr{F}=\varnothing$, и пусть k — наименьшее целое число, такое, что хоть одно $(k+1)$-членное семейство $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ имеет пустое пересечение. Так как каждые k множеств из $\mathscr{G}$ имеют общую точку, то нерв $N\mathscr{G}$ изоморфен

$(k-1)$-мерному остову S^{k-1} k-симплекса. Поскольку нерв $N\mathcal{G}$ гомологически подобен объединению U всех множеств из $\mathcal{G}$, отсюда следует, что $(k-1)$-мерная гомология U не тривиальна. Но это невозможно, так как $U \subset R^n$ и $k-1 \geqslant n$.

* * * *

Геометрическая теорема Хелли дает некоторую информацию о возможных «*типах пересечений*» выпуклых множеств в R^n. Дополнительная информация дается результатом Хадвигера и Дебруннера [2] (4.4 выше). Естественно спросить, что подразумевается под «типом пересечения выпуклых множеств в R^n» и, основываясь на точном определении, попытаться найти все такие типы. Мы предлагаем два различных, но в основном эквивалентных определения:

Тип пересечения выпуклых множеств в R^n есть

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1) нерв } N\mathcal{F} \text{ конечного семейства } \mathcal{F} \\ \text{2) массив (т. е. многомерная матрица)} \\ \quad \text{инциденций } A(F_1, \ldots, F_k) \text{ упорядоченно-} \\ \quad \text{го } k\text{-набора} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{выпуклых} \\ \text{подмно-} \\ \text{жеств } R^n. \end{array}$$

В первом случае $N\mathcal{F}$ есть абстрактный комплекс, областью вершин которого является $\mathcal{F}$, причем $\mathcal{G} \in N\mathcal{F}$ (т. е. $\mathcal{G}$ есть множество вершин симплекса в $N\mathcal{F}$) тогда и только тогда, когда $\pi\mathcal{G} \neq \varnothing$. Задача состоит в том, чтобы существенно охарактеризовать все абстрактные комплексы, которые (с точностью до изоморфизма) могут быть получены на этом пути. Во втором случае $A(F_1, \ldots, F_k)$ есть функция, заданная на $\{1, \ldots, k\}^k$ со значениями из $\{0, 1\}$, причем $A(i_1, \ldots, i_k) = 1$ тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{k} F_{i_\alpha} \neq$ $\neq \varnothing$. Задача заключается в том, чтобы существенно охарактеризовать массивы инциденций, которые могут при этом возникать. Конечно, эти две задачи эквивалентны, но различие формулировок может натолкнуть на разные подходы. По-видимому, здесь могут быть полезны идеи Хадвигера [2], [5]; см. также более позднюю работу Вегнер [2].

Заметим, что желаемое описание может существенно зависеть от размерности пространства, так как при неограниченном числе измерений возможен любой тип пересечения. Из теоремы Хелли вытекает, что для семейств в R^n комплекс $N\mathcal{F}$ определяется его n-мерным остовом и функция $A(F_1, \ldots F_k)$ определяется ее сужением на k-наборы $(i_1, \ldots, i_k)$, содержащие не более чем $n+1$ различных номеров. Можно рассматривать вместо $A(F_1, \ldots, F_k)$ аналогично определяемый массив инциденций $M_n(F_1, \ldots, F_k)$, являющийся функцией, заданной на $\{1, \ldots, k\}^{n+1}$, со значениями в $\{0, 1\}$ и выражающий только инциденцию j-наборов из F_i при $j \leqslant n+1$. Дальнейшие ограничения накладываются результатом Хадвигера и Дебруннера [2]. Однако проблема общей характеризации кажется очень сложной [8]).

С одномерным случаем указанной проблемы столкнулся Бенцер [1], [2] в связи с одной задачей генетики. Он рассматривал $k \times k$ матрицы вида $M_2(F_1, \ldots$ $\ldots, F_k)$ для некоторых k-наборов отрезков на прямой. Соответственно можно ставить вопрос об описании таких графов G, которые представимы отрезками, т. е. могут быть реализованы как 1-остовы нерва $N\mathcal{F}$ для конечного семейства $\mathcal{F}$ отрезков на прямой. В этом виде задача была решена Леккеркеркером и Боландом [1], а также Гилмором и Гофманом [1] и Фалкерсоном и Гроссом [2] (см. также Робертс [1] и Райзер [2]). Результат Леккеркеркера и Боланда заключается в следующем:

4.12. *Конечный граф G представим отрезками тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим двум условиям:*

(α) *не содержит несократимого цикла с более чем тремя ребрами*[1]);

[1]) Цикл сократим, если его собственная часть также является циклом. — *Прим. перев.*

(β) *для каждых трех вершин графа G по крайней мере одна принадлежит любому из путей, соединяющих две другие.*

Они также характеризуют представимые отрезками графы как графы, не имеющие подграфов определенных типов, и предлагают практические приемы для выяснения того, представим ли данный граф отрезками [9]).

Мы обращаемся теперь к абстрактному описанию некоторых типов задач, которые возникают в связи с теоремой Хелли и смежными вопросами. Пусть X — данное пространство и $\mathfrak{P}$ — «наследственное» свойство семейств подмножеств X, т. е. $\mathfrak{P}$ — класс семейств из подмножеств X, причем из $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \in \mathfrak{P}$ вытекает $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}$. Определим для каждой мощности $\varkappa$ новое свойство $\mathfrak{P}_\varkappa$, приняв, что $\mathcal{G} \in \mathfrak{P}_\varkappa$, если для всех $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ с $\operatorname{card} \mathcal{F} < \varkappa+1$ имеет место $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}$. (Использование условия «$\operatorname{card} \mathcal{F} < \varkappa+1$», а не «$\operatorname{card} \mathcal{F} \leqslant \varkappa$» связано с предположением Грюнбаума и Кли о том, что вводимое ниже число Хелли $\alpha_{\aleph_0}(\mathscr{E}^n)$ скорее равно $n+1$, чем $n+2$. Правда, возникает меньше неудобных формулировок, если использовать условие «$\operatorname{card} \mathcal{F} \leqslant \varkappa$»; этот путь предпочитает Данцер. Но мы берем «$\operatorname{card} \mathcal{F} < \varkappa+1$» вместо «$\operatorname{card} \mathcal{F} \leqslant \varkappa$» с целью охватить как конечные, так и бесконечные мощности.)

Задача *типа Хелли* состоит в отыскании условий, при которых из $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\varkappa$ вытекает $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\lambda$ для мощностей $\varkappa$ и λ, $\varkappa < \lambda$. Условия могут налагаться на отдельные множества из семейства $\mathcal{F}$ или на структуру самого $\mathcal{F}$. Конечно, такие условия будут зависеть от X, $\mathfrak{P}$, $\varkappa$ и λ. Эта задача чаще встречается в другой постановке: при данных X, $\mathfrak{P}$, условиях на $\mathcal{F}$ и $\varkappa$ (соответственно λ) требуется найти наибольшее λ (соответственно наименьшее $\varkappa$), при котором из $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\varkappa$ следует $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\lambda$.

Более общая задача называется здесь задачей *типа Галлая*. Пусть даны X, $\mathfrak{P}$, $\varkappa$, λ и условия на $\mathcal{F}$. Даже если из $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\varkappa$ не вытекает $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\lambda$, каждое $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\varkappa$ может быть разбито на подсемейства, обладающие свойством $\mathfrak{P}_\lambda$.

Задача заключается в том, чтобы определить наименьшую мощность ψ, при которой каждое семейство $\mathcal{F}$, удовлетворяющее данным условиям и обладающее свойством $\mathfrak{P}_\varkappa$, можно разбить на ψ или менее подсемейств, каждое из которых обладает свойством $\mathfrak{P}_\lambda$.

О задачах еще более общего типа см. 8.8+.

В литературе задачи указанных типов рассматривались главным образом для выпуклых подмножеств линейных пространств; остальные работы почти всегда касались сферических пространств (см. § 9)[1]. Мы предполагаем, что среди многих теорем, которые можно сформулировать без условия линейности, большинство имеет аналоги не только для сферы, но и для любого многообразия. Особый интерес представляет свойство иметь непустое пересечение[2]). Мы обозначаем это свойство через $\mathfrak{D}$, так что $\mathcal{F} \in \mathfrak{D}$, если $\pi\mathcal{F} \neq \neq \varnothing$. В литературе рассматриваются только задачи, в которых $\varkappa$ — данное, возможно меньшее число, а λ— данное, возможно большее. Очевидно $\mathfrak{P}_2$ — простейшее содержательное свойство. В ряде вопросов $\mathfrak{P}_{\aleph_0}$ (обозначаемое впредь $\mathfrak{P}_\infty$) представляет особый интерес, так как при $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}_\infty$ соображения компактности часто позволяют доказать, что $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}$. Заметим, что $\mathcal{F} \in \mathfrak{D}_2$ означает, что в $\mathcal{F}$ каждые два множества имеют общую точку, а $\mathcal{F} \in \mathfrak{D}_\infty$ означает, что $\mathcal{F}$ обладает свойством конечного пересечения. Свойство $\mathfrak{D}_\infty$ является в некотором роде граничным для комбинаторной геометрии и общей топологии.

В известных результатах по приведенным выше задачам фигурируют главным образом числа $\alpha_\lambda(\mathcal{E})$, $\beta_\varkappa(\mathcal{E})$, $\gamma_\varkappa(\mathcal{E})$, которые определяются ниже в терминах свойства $\mathfrak{D}$. (Их определение может быть дано и в терминах других свойств; в этом направлении можно поставить некоторые интересные задачи). Пусть $\mathcal{E}$ —

---

[1]) С абстрактно комбинаторной точки зрения эти задачи были изучены Данцером.

[2]) Большой интерес имеет также свойство $\mathfrak{Q}$ состоять из непересекающихся множеств: $\mathcal{F} \in \mathfrak{Q}$ тогда и только тогда, когда $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, если $F_i \in \mathcal{F}$ (где $i=1, 2$) и $F_1 \neq F_2$ (см. 8.6—8.8).

семейство множеств. Определим следующие его характеристики:

λ-м *числом Хелли* $\alpha_\lambda(\mathscr{E})$ назовем наименьшую мощность $\varkappa$, при которой $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_\varkappa$ влечет за собой $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_\lambda$;

$\varkappa$-м *числом Ханнера* $\beta_\varkappa(\mathscr{E})$ назовем наибольшую мощность λ с «$\lambda+1 \leqslant$ (следующая за card $\mathscr{E}$)», при которой $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_\varkappa$ влечет за собой $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_\lambda$;

$\varkappa$-м *числом Галлая* $\gamma_\varkappa(\mathscr{E})$ назовем наименьшую мощность μ, при которой каждое $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}, \mathscr{F} \in \mathfrak{D}_\varkappa$ может быть расщеплено на μ (или менее) подсемейств, из которых каждое обладает свойством $\mathfrak{D}_\infty$.

Числа Хелли и Ханнера двойственны в том смысле, что если card $\mathscr{E} \geqslant \lambda$, то $\alpha_\lambda(\mathscr{E}) \leqslant \varkappa$ тогда и только тогда, когда $\beta_\varkappa(\mathscr{E}) \geqslant \lambda$. Заметим, что $\alpha_{\aleph_0}(\mathscr{E}) = \alpha(\mathscr{E})$, где $\alpha(\mathscr{E})$ — число Хелли, определенное ранее, и что $\alpha_{\aleph_0}(\mathscr{E}) \leqslant \delta$ тогда и только тогда, когда $\gamma_\delta(\mathscr{E}) = 1$. Теорема Хелли утверждает, что, если $\mathscr{C}^n$ — семейство всех выпуклых подмножеств пространства R^n, то $\alpha_{\aleph_0}(\mathscr{C}^n) = n+1$ и $\beta_{n+1}(\mathscr{C}^n) = \aleph_0$. В § 7 рассматриваются числа Ханнера и Галлая для некоторых подклассов $\mathscr{C}^n$ и обсуждаются задачи Ханнера [1] и Галлая (Фейеш Тот [3]), с которыми связана наша терминология и используемые обозначения[10]).

§ 5. Общие трансверсали

Назовем *m-трансверсалью* семейства множеств в R^n m-мерную плоскость, пересекающую каждое из входящих в рассматриваемое семейство множеств. Используя эту терминологию, можно сказать, что теорема Хелли относится к 0-трансверсалям, а обобщение Хорна 4.3 гарантирует, при некоторых условиях, наложенных на 0-трансверсали, существование m-трансверсалей. Настоящий параграф будет посвящен следующей задаче, впервые сформулированной Винченцини [1]: требуется найти условия, налагаемые на семейство $\mathscr{F}$ множеств в R^n, выполнение которых обеспечивает наличие m-трансверсали у семейства $\mathscr{F}$, если только каждое j-членное подсемей-

ство $\mathcal{F}$ имеет такую трансверсаль; здесь $1 \leqslant m \leqslant n-1$ и $j \geqslant 2$. Пока в этом направлении известно лишь очень немногое, относящееся к случаю $m=n-1$ (см. 5.1 и 5.2); все остальные результаты касаются случая $m=1$ и, частично, случая $n=2$. Литература изобилует примерами, показывающими, что даже в случае множеств в R^2 требуемые условия должны быть весьма сильными (Фрухт [1], Грюнбаум [1], [6], Хадвигер [9], Хадвигер и Дебруннер [1], [3], Херроп и Радо [1], Кейне [1], Кёйпер [1], Сантало [1], [2]).

В задаче Винченцини участвует многообразие $F_{n, m}$ всех m-плоскостей пространства R^n. В то время как $F_{n, 0}$, очевидно, тождественно с R^n, многообразия $F_{n, m}$ при $1 \leqslant m \leqslant n-1$ не стягиваемы в точку и в этом лежит часть трудностей. По-видимому, любое естественное изучение m-трансверсалей, имеющее целью найти новые теоремы при минимальных предположениях, должно учитывать известные результаты о структуре $F_{n, m}$ и тесно связанных с ними грассмановых многообразий $G_{n+1, m+1}$ всех $(m+1)$-мерных линейных подпространств пространства R^{n+1}. По поводу некоторых таких результатов и литературы см. Стинрод [1] и Милнор [1].

Первыми значительными результатами об общих трансверсалях были результаты Сантало [1], которым было доказано следующее утверждение:

5.1. *Если $\mathcal{P}$ — семейство параллелотопов в R^n с ребрами, параллельными осям координат, и каждое подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$, где* $\operatorname{card} \mathcal{G} \leqslant 2^{n-1}(n+1)$, *имеет $(n-1)$-трансверсаль, то и все семейство $\mathcal{P}$ также имеет $(n-1)$-трансверсаль.*

Доказательство Сантало базируется на некотором аналоге теоремы Радона. Грюнбаум [20], обобщая методы Хадвигера и Дебруннера [1], [3] и Грюнбаума [5], [6], [11], воспользовался теоремой Хелли, чтобы получить обобщение теоремы 5.1. Для формулировки его результата будет удобна следующая терминология. Выпуклый конус C называется

присоединенным конусом многогранника P, если вершина v конуса C является одной из вершин многогранника P и C есть конус проектирования P из v (т. е. $C := \bigcup_{x \in P} (v + [0, \infty)(x - v))$). Многогранник P' называется *связанным* с P при условии, что каждый присоединенный конус многогранника P' есть пересечение транслятов присоединенных конусов многогранника P. Теперь теорему Грюнбаума можно сформулировать следующим образом:

5.2. *Пусть центрально симметричный многогранник P в R^n имеет $2p$ вершин и $\mathscr{P}$ — семейство многогранников, связанных с P. Если каждое подсемейство $\mathfrak{G} \subset \mathscr{P}$, где* $\operatorname{card} \mathfrak{G} \leqslant p(n+1)$, *имеет $(n-1)$-трансверсаль, то $\mathscr{P}$ также имеет $(n-1)$-трансверсаль.*

Увеличив число $p(n+1)$, мы можем получить аналогичный результат, не требуя центральной симметрии многогранника P. Даже при дополнительных условиях, наложенных на семейство $\mathscr{P}$, граница в 5.1 при $n=2$ является наилучшей (см. Фрухт [1], Сантало [2], Грюнбаум [6]). Лучшие границы, отвечающие бóльшим значениям n, до сих пор неизвестны.

По поводу других результатов о трансверсальных гиперплоскостях см. работу Валентин [9].

Оставшаяся часть параграфа будет посвящена 1-трансверсалям. Мы говорим, что семейство множеств $\mathscr{F}$ обладает свойством $\mathfrak{T}$, если $\mathscr{F}$ имеет 1-трансверсаль, и что оно обладает свойством $\mathfrak{T}_j$, если 1-трансверсаль имеется у каждого подсемейства, состоящего из не более, чем j множеств семейства $\mathscr{F}$. Следующий результат (Грюнбаум [20]) в некотором смысле является обратным для 5.2:

5.3. *Если K — центрально симметричная выпуклая фигура в R^2 и существует такое $j < \infty$, что $\mathfrak{T}_j$ влечет за собой $\mathfrak{T}$ для всех семейств гомотетов фигуры K, то K — многоугольник.*

Более ранним является следующий результат Сантало [1]:

5.4. *Для семейства параллелотопов в* R^n *с ребрами, параллельными осям координат,* $\mathfrak{T}_{(2n-1)2^n}$ *влечет за собой* $\mathfrak{T}$.

Было бы интересно найти (аналогичное 5.2) обобщение теоремы 5.4 для более общих классов многогранников.

Конечное семейство $\mathcal{K}$ множеств в R^n называется *вполне разделимым*, если существует конечная последовательность параллельных гиперплоскостей $\mathcal{H} = (H_0, \ldots, H_m)$ в R^n и нумерация $(K_1, \ldots, K_m)$ множеств семейства $\mathcal{K}$, такие, что *каждое* K_i *принадлежит открытой полосе, ограниченной гиперплоскостями* H_{i-1} *и* H_i.

Следующий результат Грюнбаума [11] является прямым приложением топологической теоремы Хелли:

5.5. *Пусть* $\mathcal{K}$ *и* $\mathcal{H}$ *имеют указанный выше смысл, и пусть* K_i^* *(где* $1 \leqslant i \leqslant m$*) есть множество точек* $(u, v) \in H_0 \times H_m$*, таких, что отрезок* $[u, v]$ *пересекает* K_i. *Если все множества* K_i *компактны и выпуклы и если пересечение любых* 3, 4, ..., $2n-2$ *из множеств* K_i^* *является гомологической клеткой, то (для семейства* $\mathcal{K}$*) свойство* $\mathfrak{T}_{2n-1}$ *влечет за собой свойство* $\mathfrak{T}$.

Отсюда он выводит теоремы:

5.6. *Для семейства компактных выпуклых множеств в* R^n*, принадлежащих различным параллельным гиперплоскостям, свойство* $\mathfrak{T}_{2n-1}$ *влечет за собой* $\mathfrak{T}$.

5.7. *Для семейства евклидовых шаров в* E^n*, расстояние между центрами каждых двух из которых превосходит сумму соответствующих диаметров, из свойства* $\mathfrak{T}_{2n-1}$ *следует* $\mathfrak{T}$.

Результат 5.6 легко вытекает из геометрической теоремы Хелли; его впервые доказал для случая $n=2$ Сантало [2] (см. также Дрешер [1], Радемахер и Шёнберг [1]); 5.7 обобщает более

ранние результаты Хадвигера [7] и Хадвигера и Дебруннера [3].

При тех же $\mathscr{K}$ и $\mathscr{H}$, что и ранее, и $j \geqslant 2$, $\mathscr{K}$ называется *j-простым*, если каждые j из множеств K_i^* имеют связное пересечение. Из рассуждений, аналогичных рассуждениям Брунна [2], следует, что каждое вполне разделимое семейство выпуклых множеств в R^n является 3-простым. Используя это замечание, Грюнбаум [11] вывел из 5.5 следующую теорему:

5.8. *Для 4-простого вполне разделимого семейства компактных выпуклых множеств в R^3 из свойства $\mathfrak{T}_5$ следует $\mathfrak{T}$.*

Его примеры показывают, что здесь ни одно из условий не может быть опущено. Было бы интересно обобщить 5.8 для размерностей $n>3$, в частности, выяснить, вытекает ли из связности множеств вида $\bigcap\limits_i K_i^*$ то, что они обязательно являются гомологическими клетками.

Несколько теорем об общих трансверсалях для бесконечных семейств не имеют явных аналогов в случае конечных семейств. Следующая теорема вытекает из данного Хадвигером [8] доказательства более слабого утверждения:

5.9. *Для семейства компактных выпуклых множеств в E^n, объединение которых неограничено, в то время как диаметры всех множеств семейства имеют конечную верхнюю границу, из свойства $\mathfrak{T}_{n+1}$ вытекает $\mathfrak{T}$.*

Обратимся наконец к R^2, для которого задача Винченцини была изучена более полно. Два подхода привели к интересным результатам. При одном подходе сами выпуклые множества могут быть почти произвольными, но накладываются строгие ограничения на их взаимное расположение на плоскости. Хадвигер [10], обобщая ранее полученные результаты Винченцини [5], Кли [3] и Грюнбаум [1], доказал следующую теорему (в которой под *непересе-*

кающимся семейством понимается семейство попарно не пересекающихся множеств:

5.10. *Непересекающееся семейство $\mathscr{K}$ компактных выпуклых множеств в R^2 имеет 1-трансверсаль тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}$ может быть линейно упорядочено таким образом, что каждое 3-членное подсемейство $\mathscr{K}$ имеет 1-трансверсаль, пересекающую его члены в установленном порядке.*

Будем говорить, что семейство $\mathscr{K}$ множеств в R^n обладает (при $j \geqslant 2$) свойством $\mathfrak{S}_j$, если каждое не более чем j-членное подсемейство из $\mathscr{K}$ может быть упорядочено таким образом, что для любого i, где $1 \leqslant i \leqslant j-1$, выпуклая оболочка первых i множеств не пересекается с выпуклой оболочкой последующих $j-i$ множеств. Главный результат Кёйпера [1] и Херропа и Радо [1] может быть сформулирован следующим образом:

5.11. *Семейство компактных выпуклых множеств в R^2 обладает свойством $\mathfrak{T}$, если оно обладает свойствами $\mathfrak{S}_4$ и $\mathfrak{T}_3$, а также, если оно обладает свойствами $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{T}_4$.*

В этой форме результат был дан Херропом и Радо. Вариант Кёйпера сформулирован для проективной плоскости, которая в некотором смысле служит здесь более подходящим фоном. Грюнбаум [11] воспользовался топологической теоремой Хелли, чтобы установить (для проективной плоскости) более сильную форму последней части теоремы 5.11.

Второй подход оставляет больше свободы для взаимного расположения множеств, но предполагает, что они взаимно не пересекаются и конгруентны. (То, что эти предположения фактически необходимы, показано рядом примеров; см. Хадвигер и Дебруннер [1], [3].)

5.12. *Для непересекающегося семейства равных кругов в E^2 из свойства $\mathfrak{T}_5$ следует $\mathfrak{T}$; для такого же семейства из не менее чем шести кругов из $\mathfrak{T}_4$ следует $\mathfrak{T}$.*

5 Зак. 1203

5.13. *Для непересекающегося семейства транслятов параллелограмма в R^2 из свойства $\mathfrak{T}_5$ следует $\mathfrak{T}$.*

Первая часть в 5.12 принадлежит Данцеру [1], решившему задачу Хадвигера и Дебруннера [1], и Хадвигеру [6]; результат 5.13 и вторая часть 5.12 принадлежит Грюнбауму [6]. О других результатах по общим трансверсалям на плоскости см. Грюнбаум [11] и особенно Хадвигер и Дебруннер [3].

Укажем еще следующие предположения Грюнбаума [6]: (1) Для непересекающихся семейств конгруентных квадратов в E^2 и для непересекающихся семейств транслятов произвольной выпуклой фигуры в R^2 из $\mathfrak{T}_5$ следует $\mathfrak{T}$; (2) Для непересекающихся семейств конгруентных компактных выпуклых множеств в E^2 из $\mathfrak{T}_6$ следует $\mathfrak{T}$. Второе предположение не установлено даже для непересекающихся семейств равных отрезков.

Следующий результат типа Галлая об общих трансверсалях принадлежит Хадвигеру и Дебруннеру [1], [3]:

5.14. *Для семейства $\mathscr{K}$ положительных гомотетов компактного выпуклого множества в R^2 из свойства $\mathfrak{T}_4$ следует, что $\mathscr{K}$ может быть разбито на четыре или менее подсемейств, каждое из которых обладает свойством $\mathfrak{T}$.* [11])

§ 6. Некоторые задачи о покрытиях

Этот параграф мы включили в наш обзор потому, что теорема Хелли является ценным орудием при решении некоторых относящихся к рассматриваемой здесь теме задач, а также потому, что теоремы о покрытиях используются в § 7 при рассмотрении пересечений специальных семейств. Если бы мы ограничились только результатами, непосредственно связанными с теоремой Хелли, то у нас получилась бы картина, не дающая полного представления о занимающей нас интересной и развивающейся области

исследований; поэтому мы включаем и дополнительный материал, необходимый для завершенности общей картины.

Нашей отправной точкой будет теорема Юнга [1], о популярности которой можно судить по месту, которое она занимает в книгах Боннезена и Фенхеля [1], Яглома и Болтянского [1], Хадвигера [15], Эглстона [3] и во многих современных исследованиях. (К числу работ, цитируемых у Блюменталя и Валина [1] и у Хадвигера [15], мы добавим работы Страшевича [1], Лагранжа [1], Верблюнского [1], Гастина [1], Эрхарта [1], Мельзака [1] и Грёнвуда и Эусанио [1]).

Теорема Юнга, которая была доказана выше (см. 2.6) с помощью теоремы Хелли, утверждает, что в E^n каждое подмножество диаметра $\leqslant d$ принадлежит шару радиуса $\leqslant [n/(2n+2)]^{1/2}d$, где, разумеется, все расстояния измеряются в смысле евклидовой метрики. Интересная задача возникает, если заменить евклидово расстояние другими метриками. Этот вопрос рассматривается ниже. Другие обобщения и вопросы, смежные с задачей Юнга, разбираются в этом же параграфе. Хотя в каждом случае известные результаты весьма скудны, общие формулировки намечают направления для поисков.

* * * *

Пусть E — некоторое множество, а ρ — функция, заданная на $E\times E$ со значениями в $(0, \infty)$. Для каждой точки $x\in E$ и каждого $\varepsilon>0$ обозначим $V_\rho(x, \varepsilon) := \{y\in E : \rho(x, y)\leqslant\varepsilon\}$. При $x\in E$ и $Y\subset E$ (ρ, x)-*радиусом* множества Y называют число

$$r_{\rho, x}(Y) := \sup\{\rho(x, y) : y\in Y\} = \inf\{\varepsilon\geqslant 0 : Y\subset V_\rho(x, \varepsilon)\},$$

а ρ-*радиусом* множества Y — число

$$\mathrm{rad}_\rho Y := \inf\{\varepsilon\geqslant 0 : \exists x\in E \quad \text{и} \quad Y\subset V_\rho(x, \varepsilon)\} = \\ = \inf\{r_{\rho,x}(Y) : x\in E\};$$

наконец, ρ-*диаметром* множества $Y\subset E$ называют

число

$$\operatorname{diam}_\rho Y := \sup\{\rho(y, y') : y, y' \in Y\} = \sup\{r_{\rho, y}(Y) : y \in Y\}.$$

Для двух (может быть, различных) функций ρ и ρ' на $E \times E$ со значениями в $[0, \infty)$ ставится задача о нахождении функции $J(\rho, \rho'; d)$, определяемой при каждом $d \geqslant 0$ равенством

$$J(\rho, \rho'; d) := \sup\{\operatorname{rad}_\rho Y : Y \subset E, \operatorname{diam}_{\rho'} Y \leqslant d\}.$$

В существующей литературе рассматриваются только специальные случаи этой задачи, причем, главным образом, отвечающие равенству $\rho = \rho'$; соответственно этому мы определим

$$J(\rho, d) := J(\rho, \rho; d).$$

В этих обозначениях теорема Юнга утверждает, что, если ρ_0 (евклидово) расстояние в E^n, то $J(\rho_0, d) = [n/(2n+2)]^{1/2} d$. Сантало [5] описывает функцию $J(\rho, d)$, где ρ — геодезическое расстояние на единичной сфере S^n в E^{n+1} (см. также обсуждение сферической выпуклости в 9.1) [1]).

Приведенная выше формулировка объединяет различные задачи, относящиеся к покрытию положительными гомотетами некоторого множества в линейном пространстве E. Пусть, в частности, C — выпуклое тело в E, причем $0 \in \operatorname{int} C$, и при $x, y \in E$ расстояние $\rho_C(x, y)$ определяется равенством [2])

$$\rho_C(x, y) := \inf\{t \geqslant 0 : y - x \in tC\}.$$

Тогда ρ удовлетворяет неравенству треугольника и симметрично, если $C = -C$. (О метрических пространствах с несимметричным расстоянием см. Цаустинский [1] [3]).) Функция $J(\rho_C, d)$ положительно однородна относительно d и потому определена значением функции $J(\rho_C, 1)$. Известно, что $J(\rho_C, 1) \leqslant n(n+1)^{-1}$, если E n-мерно и $C = -C$ (см. ниже 6.4—6.5).

---

[1]) Ср. также Бураго [1]. — *Прим. ред.*

[2]) Соответствующая метрика обычно называется *метрикой Минковского* с индикатрисой длин C. — *Прим. ред.*

[3]) Ср. также Сорокин [1]. — *Прим. ред.*

В приведенной постановке естественно интересоваться не только радиусами, но и центрами множеств; *ρ-центром* множества Y назовем точку $x \in E$, для которой $r_{\rho,x}(Y) = \mathrm{rad}_\rho Y$. В конечномерном случае для метрик ρ_C такие центры всегда существуют, в евклидовой метрике центр единствен (для ограниченных Y) и принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества Y. Последнее условие является почти характеристическим для евклидовой метрики, так как имеет место следующая теорема, доказанная Кли [5]:

6.1. *Для нормированного линейного пространства E*[1]) *эквивалентны следующие три утверждения:*

a^0. *E есть евклидово пространство или E двумерно;*

b^0. *Если подмножество $Y \subset E$ принадлежит шару радиуса <1, то Y принадлежит некоторому шару единичного радиуса с центром в одной из точек* $\mathrm{conv}\, Y$;

c^0. *Если подмножество $Z \subset E$ принадлежит шару радиуса <1, то Z пересекается с каждым шаром единичного радиуса с центром в* $\mathrm{conv}\, Z$.

Результаты, связанные с эквивалентностью a$^0 \Leftrightarrow$ b^0, были получены Какутани [1], Грюнбаумом [7], Комфортом и Гордоном [1], причем первый и последние пользовались теоремой Хелли.

* * * *

Основное соотношение между свойствами покрытия и пересечения было подсказано теоремой 2.1. В частности, весьма полезно следующее простое следствие теоремы Хелли:

6.2. *Если $X \subset R^n$ и каждые $n+1$ или менее точек из X могут быть покрыты некоторым транслятом выпуклого тела $K \subset R^n$, то X также принадлежит трансляту тела K.*

Более пристальное рассмотрение доказательства 6.2 приводит к тривиальной, но важной лемме:

---

[1]) То есть в конечномерном случае (а только он и рассматривается в этой книге) для пространства Минковского (см. сноску 2 на предыдущей странице). — *Прим. ред.*

6.3. *Пусть G группа (относительно сложения, но не обязательно абелева); W и Z — подмножества G, а $\varkappa$ и λ — мощности. Тогда эквивалентны следующие два утверждения:*

a⁰. *Для любого $Y \subset G$, где* $\operatorname{card} Y < \lambda + 1$, *и любого $X \subset Y$, где* $\operatorname{card} X < \varkappa + 1$, *принадлежащего некоторому множеству семейства $\{g + W : g \in G\}$, Y обязательно принадлежит некоторому множеству семейства $\{g + Z : g \in G\}$;*

b⁰. *Для любого $U \subset G$ и семейства $\{W + u : u \in U\}$, в котором каждое подсемейство мощности $< \varkappa + 1$ имеет непустое пересечение, обязательно всякое подсемейство семейства $\{Z + u : u \in U\}$ мощности $< \lambda + 1$ также имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть имеет место a⁰; рассмотрим фигурирующее в b⁰ множество $U \subset G$. Пусть $V \subset U$ и $\operatorname{card} V < \lambda + 1$. Мы хотим показать, что $\bigcap_{v \in V} (Z + v)$ непусто, или, что эквивалентно, что $-V$ принадлежит некоторому трансляту множества Z. Но это следует из a⁰, так как предположения b⁰ гарантируют, что в множестве $-V$ каждое подмножество мощности $< \varkappa + 1$ принадлежит некоторому трансляту множества W. Таким образом, a⁰ влечет за собой b⁰. Аналогично получается, что b⁰ влечет a⁰.

Так же легко доказывается обобщение теоремы 6.3, которое связано с 6.3, как 2.1 с 6.2. Из 6.3 следует, что при фиксированных W, λ и при $Z = W$ число Хелли $\alpha_\lambda(\{W + g : g \in G\})$ (определенное в § 4) есть наименьшая мощность $\varkappa$, для которой имеет место a⁰. Если каждые $\alpha(\{W + g : g \in G\})$ точек конечного подмножества $Y \subset G$ могут быть покрыты некоторым левым транслятом множества W, то и все множество Y может быть так покрыто. При соответствующих условиях компактности это приложимо и к бесконечным множествам Y.

Легко проверяется следующее утверждение:

6.4. *Пусть C — выпуклое тело в R^n с $0 \in \operatorname{int} C$; через J_C^* [соответственно, через J_C] обозначим наимень-*

шее число $\sigma \geqslant 0$, *такое, что каждое множество* Y, *где для любых* y, $y' \in Y$ *всегда* $y' \in y+2C$ [*соответственно, каждое двухточечное подмножество множества* Y *принадлежит некоторому трансляту тела* C], *покрывается некоторым транслятом* σC. *В таком случае* $\overset{*}{J}_C = J(\rho_C, 2)$, *причем если* $C=-C$, *то* $\overset{*}{J}_C = J_C$.

Число J_C называется *постоянной Юнга* тела C, и каждый транслят множества $J_C C$ есть связанный с C *шар Юнга*. Заметим, что $\overset{*}{J}_C$ зависит от положения C относительно начала координат, тогда как J_C инвариантно относительно переносов. Кроме того, $\operatorname{diam}_{\rho_C} Y = \operatorname{diam}_{\rho_{C\cap(-C)}} Y$; поэтому $\overset{*}{J}_C \leqslant J_{C\cap(-C)}$. Если $C=-C$, то оба налагавшиеся на Y условия сводятся к тому, что $\operatorname{diam}_{\rho_C} Y \leqslant 2$; в общем же случае эти условия не эквивалентны. Если C не центрально симметрично, то удобно ввести *C-расстояние*, инвариантное относительно переносов C. Оно вводится как на стр. 58 с единичным шаром (индикатрисой длин) C^*, получаемым из тела C симметризацией Минковского, т. е. с единичным шаром $C^* := (C+(-C))/2$. Этому эквивалентны определения C-расстояния и *C-диаметра:*

$$\|x-y\|_C := \inf\{2\alpha \geqslant 0\colon \{x, y\} \text{ принадлежит некоторому трансляту тела } \alpha C\};$$

$$\operatorname{diam}_C Y = \operatorname{diam}_{\rho_{C^*}} Y = \sup\{\|x-y\|_C : x, y \in Y\}.$$

Известна следующая теорема:

6.5. *Если* C — *выпуклое тело в* R^n *с* $0 \in \operatorname{int} C$, *то* $J_C \leqslant n$ *и* $\overset{*}{J}_C \leqslant 2n(n+1)^{-1}$ (*откуда* $J_C \leqslant 2n(n+1)^{-1}$, *если* $C=-C$).

Неравенство для $\overset{*}{J}_C$ доказано Боненблустом [1], а позднее, в более простом виде, Лейхтвейсом [1] и Эглстоном [2]; тот же результат, но изложенный на языке анализа, содержится в работе Волков [1] [1]) [12]). Лейхтвейс описывает также тела, для которых достигается максимум значений $\overset{*}{J}_C$. Тело $C \subset R^n$

[1]) См. также Сорокин [2]. — *Прим. ред.*

будем называть *телом Лейхтвейса*, если существует такой симплекс T, что $T+(-T)\subset 2C\subset (n+1)(-T)$ (отсюда следует, что начало координат есть центр тяжести T). Лейхтвейс [1] показал, что для выпуклого тела $C\subset R^n$ равенство $J_C^* = 2n(n+1)^{-1}$ имеет место тогда и только тогда, когда C есть тело Лейхтвейса; при этом выпуклая оболочка соответствующего множества Y обязательно (с точностью до переноса) является таким симплексом T. С помощью этого результата легко установить, что $J_C \leqslant n$, причем равенство имеет место только в случае, когда C — симплекс; соответствующее множество conv Y является при этом транслятом тела $-C$.

Приведенные выше результаты были получены также Грюнбаумом [2], [8], который пользовался следующими определениями:

6.6. *Для выпуклого тела $C\subset R^n$, где $0\in \operatorname{int} C$, постоянная Юнга J_C [соответственно постоянная расширения E_C] есть наименьшее число $\sigma>0$, такое, что для любого семейства $\{x+C : x\in X\}$ [соответственно $\{x+\alpha_x C : x\in X\}$] попарно непересекающихся транслятов [(положительных) гомотетов] множества C расширенное семейство $\{x+\sigma C : x\in X\}$ [$\{x+\sigma\alpha_x C : x\in X\}$] имеет непустое пересечение.*

Из 6.3 ясно, что это определение J_C согласуется с ранее данным. В частности, J_C инвариантно относительно переносов C, но E_C этим свойством не обладает. Ясно, что $1\leqslant J_C\leqslant E_C$; из результатов Нахбина [1], Секефальви-Надя [1] и Ханнера [1] следует, что $J_C=1$ или $E_C=1$ тогда и только тогда, когда C — параллелотоп (см. 7.1) Грюнбаум [8] доказал следующее:

6.7. *Для выпуклого тела C в R^n, где $C=-C$, имеем $1\leqslant J_C\leqslant E_C\leqslant 2n(n+1)^{-1}$. Даже в случае плоскости R^2 числа J_C и E_C могут не совпадать; однако они обязательно равны, если одно из них равно 1 или $2n(n+1)^{-1}$, а также, если C — эллипсоид (евклидов шар).*

По поводу тесной связи между постоянными расширения и распространением линейных преобразований см. 7.2.

Теперь для каждой мощности $j \geqslant 2$ определим J_C^j и E_C^j как в 6.6, но для семейств ячеек, обладающих свойством $\mathfrak{D}_j$, а не свойством $\mathfrak{D}_2$, как ранее. Таким образом, например, $J_C^2 = J_C$, а J_C^3 определяется заменой в 6.6 слова «попарно» на «по три». В силу теоремы Хелли при $j \geqslant n+1$ заведомо $J_C^j = E_C^j = 1$ для всякого выпуклого тела $C \subset R^n$. Известно еще, что

6.8. *Если B^n есть n-мерный евклидов шар, то при* $2 \leqslant j \leqslant n+1$

$$E_{B^n}^j = J_{B^n}^j = \left[nj(n+1)^{-1}(j-1)^{-1}\right]^{1/2}.$$

Второе равенство принадлежит Данцеру (неопубликованная рукопись; см. также примечание к доказательству 2.6); первое равенство следует из рассуждения, примененного Грюнбаумом [8] для случая $j=2$.

Интересно заметить, что

$$\max\{J_C^3 : C = -C,\ C \text{ выпуклое тело в } R^3\} = 3/2;$$

это значение является также максимумом для J_C^2. (Если $C = -C$ и $J_C^3 = \frac{3}{2}$, то, естественно, $J_C^2 = \frac{3}{2}$ и C есть тело Лейхтвейса. С другой стороны, каждое тело Лейхтвейса $D \subset R^3$, которое является также *телом Ханнера* [см. 7.1 и далее], имеет $J_D^3 = \frac{3}{2}$; правильный октаэдр является таким телом.)

По поводу связи между задачами типа Галлая и числами J_C^j см. 7.5—7.6.

Другое обобщение задачи Юнга заключается в следующем. Дан класс $\mathcal{Y}$ подмножеств линейного пространства E и класс G преобразований E в E; множество $U \subset E$ называется *G-универсальным покрытием* $\mathcal{Y}$ при условии, что для каждого $Y \in \mathcal{Y}$ существует

такое $g \in G$, что $gU \supset Y$; ср. Эглстон [4] или — в совсем иной постановке — Безикович [3] [1]). Для множества C, звездного относительно начала координат, задача состоит в оценке числа

$$\inf \{\sigma \geqslant 0 : \sigma C \text{ является } G\text{-универсальным покрытием } \mathscr{Y}\}.$$

К результатам о постоянной Юнга присоединим следующую известную теорему:

6.9. *Пусть C — центрально симметричное выпуклое тело в R^n; T — симплекс, содержащий C; Y — такое подмножество R^n, что* $\operatorname{diam}_C Y \leqslant 2$ *(т. е. каждое двухточечное подмножество Y принадлежит некоторому трансляту тела C). Тогда Y может быть покрыто транслятом симплекса T или транслятом $-T$.*

Доказательство. Пусть T_1 — наименьший (положительный или отрицательный) гомотет симплекса T, покрывающий Y, а $x+\alpha C$ — наибольший положительный гомотет тела C, принадлежащий T_1. Мы утверждаем, что Y покрыто симплексом $T_2 := (2-\alpha)\alpha^{-1}(2x + (-T_1))$. Если это так, то ясно, что $\alpha \leqslant 1$ (иначе T_2 было бы меньше чем T_1) — и доказательство завершено.

Чтобы убедиться, что $T_2 \supset Y$, заметим, что T_2 — такой отрицательный гомотет T_1, что их соответствующие $(n-1)$-мерные грани лежат в параллельных гиперплоскостях, C-расстояние между которыми равно 2. Остается воспользоваться тем, что $\operatorname{diam}_C Y \leqslant 2$ и $\operatorname{cl} Y$ пересекает каждую $(n-1)$-мерную грань T_1.

---

[1]) Этот круг вопросов тесно связан с так называемой «проблемой Лебега», в которой требуется определить в E^n (в E^2) *наименьшее по объему (по площади)* G-универсальное покрытие для класса $\mathscr{Y}$ множеств диаметра $\leqslant 1$; здесь G — группа (евклидовых) движений. (Вообще в конкретных задачах G обычно — группа изометрий метрического пространства или группа параллельных переносов или группа параллельных переносов и центральных симметрий.) Проблеме Лебега (ее, конечно, можно ставить для пространств с метрикой Минковского и при иных предположениях о G), которая была поставлена знаменитым Анри Лебегом еще в 1914 г., посвящена значительная литература (см., например, обзор в книге Мешковский [1]; из более поздних публикаций см. Эглстон [5] или статью Безикович [3], содержащую обсуждение родственного проблеме Лебега вопроса). — *Прим. ред.*

Следующая теорема может быть выведена из 6.9 с помощью стандартных соображений непрерывности:

6.10. *Пусть G — группа (сохраняющих ориентацию) движений в E^n; S есть n-симплекс, описанный около евклидова единичного шара, причем такой, что $-S \in$ $\in GS$; $\mathcal{Y}$ — класс всех множеств $Y \subset E^n$ евклидова диаметра $\leqslant 2$. Тогда $S \cap -S$ является G-универсальным покрытием $\mathcal{Y}$.*

Отметим другое следствие 6.9. Если C — центрально симметричное выпуклое тело в R^n и T — симплекс, наименьший по объему среди тех, которые покрывают (после соответствующего переноса или центральной симметрии) каждое множество C-диаметра 2, то T есть транслят симплекса, имеющего наименьший объем среди описанных около тела C.

Частный случай 6.10, когда S — правильный симплекс, принадлежит Гейлу [2]. Приведенное выше доказательство 6.9 в основном принадлежит Виту [1], ученику Зюсса. Используя ту же идею, сам Зюсс [1] дал изящное доказательство теоремы Гейла и попытался применить ее для короткого доказательства теоремы Юнга. К сожалению, его вычисления в этом месте содержали неустранимую ошибку, так как если S — правильный симплекс, описанный около B^n, то при $n \geqslant 3$ множество $S \cap -S$ не помещается в шар Юнга $(J_{B^n}) B^n$.

Теорема 6.9 остается справедливой, если сделанные в ней предположения заменить следующими: «*пусть C — выпуклое тело в R^n; S — симплекс, содержащий* $(C+(-C))/2$ . . .». Было бы интересно получить аналогичный результат при первоначальных предположениях относительно S, не требуя симметрии C.

* * * *

Вместо того чтобы определять, *сколь велико должно быть* σ для того, чтобы гомотет σC тела C покрывал каждое множество с C-диаметром 2, можно задать вопрос, *сколь велико должно быть число* k транслятов тела σC при фиксированном σ, которыми можно

покрыть каждое тело C-диаметра $\leqslant 2$. В частности, обозначим через $\delta(C)$ *наименьшее* целое k, такое, что каждое множество C-диаметра 2 может быть покрыто k транслятами тела C.

Грюнбаум [3] доказал, что

6.11. *Если C — центрально симметричное выпуклое тело в R^2, то шар Юнга $J_C C$ может быть покрыт тремя транслятами C; таким образом,* $\delta(C) \leqslant 3$.

Относительно смежных результатов для евклидовой плоскости см. Гейл [2] (его результаты были усилены Мельзаком [2]), Грюнбаум [17] и работы Ленца, указываемые Грюнбаумом [17]; ср. также Цан [1]. Используя универсальное покрытие Грюнбаума [4] и Хеппеша [1], Качарова-Каранова [1] доказала, что $\delta(B^3)=4$. Задача определения чисел $\delta(B^n)$ в общем случае представляется очень трудной. Данцер установил, что

6.12. $$1{,}003^n < \delta(B^n) < \sqrt{\frac{(n+2)^3}{3}}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

(Неравенство $\delta(B^n) > 1{,}003^n$ доказано в работе Данцер [5]; доказательство верхней оценки для $\delta(B^n)$ неопубликовано[1]).)

Относительно связи между $\delta(C)$ и задачей Галлая см. 7.5.

Предположение Грюнбаума и многие другие интересные вопросы тесно связаны со знаменитой гипотезой Борсука [1] о том, что *каждое множество диаметра* 1 *в* E^n *может быть разбито на* $n+1$ *множеств меньшего диаметра* (см. Хадвигер [1], [3]). Относительно литературы по проблеме Борсука и смежным вопросам см. обстоятельный обзор Грюнбаум [17] и работы Болтянский и Гохберг [1], Мельзак [2], Лисовский [1], Фирей и Грёмер [1][2]).

---

[1]) Возможно, эта оценка уже превзойдена с помощью метода Эрдёша и Роджерса [1]; см. сноску к 7.10.

[2]) См. также Мельзак [4]. — *Прим. ред.*

Другая задача, тесно связанная с проблемой Борсука, принадлежит Леви [3] (она исследована также в двух формах Хадвигером [14], [16]): дано выпуклое тело C в R^n; спрашивается, каково наименьшее число $\varepsilon(C)$ транслятов $\operatorname{int} C$, достаточное для покрытия C? Очевидно, $\varepsilon(I^n)=2^n$ для n-мерного параллелотопа I^n; вероятно, $\varepsilon(C)\leqslant 2^n$ для каждого выпуклого тела $C\subset R^n$. Рассматривая сферическое изображение (отображение на сферу при помощи параллельных опорных гиперплоскостей) тела C, мы видим из результата Борсука [1], что $\varepsilon(C)\geqslant n+1$ (равенство в случае гладкости C), так как $(n-1)$-сфера может быть покрыта $n+1$ открытыми полусферами. (С помощью этого соображения Хадвигер [1] доказал гипотезу Борсука для гладких тел.) Леви [3], [4] показал, что $\varepsilon(C)\leqslant 4$ в R^2 с равенством для параллелограммов и только для них. См. также Гохберг и Маркус [1], а по поводу родственных задач — Болтянский [1], Болтянский и Гохберг [1], Грюнбаум [21], Солтан [1]—[4] и Визитей [1].

Замена слова «трансляты» в определении $\varepsilon(C)$ на «образы при эквиаффинных (унимодулярных аффинных) преобразованиях» приводит к другой постоянной $\varepsilon^*(C)$. Хотя легко видеть, что в R^2 (как и предполагал Леви [3]) $\varepsilon^*(C)=2$, неизвестно, будут ли значения $\varepsilon^*(C)$ большими (и какими именно) для R^n, где $n>2$ [13]).

* * * *

В рассматриваемых далее теоремах о покрытиях используются некоторая группа изометрий (евклидовых движений) в E^n и группа эквиаффинных преобразований пространства (аффинных преобразований с определителем, равным 1). Так как обе эти группы при метриках, отличных от евклидовой, нарушают метрические соотношения, то здесь не сохраняются связи с геометрией Минковского; нет здесь также аналогов 6.3, где трансляты заменялись бы более общими образами. Все же результаты 6.14—6.15 дополняют наши знания о рассматривавшихся ранее фактах,

а теоремы 6.17—6.18 являются теоремами типа Хелли в смысле § 4.

Робинсон [1], рассматривая круги D, вписанные в плоский континуум C, показал, что если C само не есть круг, то существует такое положительное ε, что каждые три точки множества $F=(1+\varepsilon)D$ могут быть перенесены в C евклидовым движением. (Он делает лишнее предположение об односвязности C.) Отсюда следует:

6.13. *В E^2 круги являются единственными континуумами C, которые имеют непустую внутренность и обладают следующим свойством:*

$\mathfrak{A}_3$. *Если $F\subset E^2$ и каждая тройка точек из множества F может быть покрыта некоторым изометрическим образом C, то и само F допускает такое покрытие.*

Вскоре после этого Сантало [3] получил двойственный результат:

6.14. *В E^2 круги являются единственными выпуклыми телами C, которые обладают следующим свойством:*

$\mathfrak{B}_3$. *Если F — выпуклое тело в E^2 и каждый треугольник, содержащий F, содержит также изометрический образ тела C, то F само содержит такой образ.*

То, что круги обладают свойствами $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{B}_3$, вытекает из теоремы Хелли (см. 2.1). Блюменталь [1], Сантало [3] и Л. Келли [1] ставят вопрос: имеются ли аналогичные результаты для других классов плоских выпуклых тел? В частности, что произойдет, если число *три* (точек из F в $\mathfrak{A}_3$, аналогично сторон содержащего F многоугольника в $\mathfrak{B}_3$) заменить каким-нибудь $k>3$? Конечно, круги будут по-прежнему обладать соответствующими свойствами $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$, но будут ли *только* они характеризоваться этими свойствами? Для $\mathfrak{A}_k$ контрпримером может служить выпуклая оболочка круга и близлежащей точки; для $\mathfrak{B}_k$ — пересечение круга с полуплоскостью.

Недавно Данцер, рассматривая вписанную в F сферу с присоединенным тонким «колпаком» (вместо

немного расширенной вписанной сферы) обобщил 6.13 на E^3 в предположении, что C — выпуклое тело. Соответствующее двойственное рассуждение проходит для 6.14. (Результаты такого рода были темой доклада в Будапеште Бёрёцкого (K. Böröczky).)

Теорема 6.13 навеяна понятием *порядка конгруентности* метрического пространства. Это понятие введено Менгером [1] и изучено Блюменталем [1], [3], Кирком [1] и другими. Метрическое пространство M имеет *индексы конгруентности* (n, k) относительно класса $\mathscr{S}$ метрических пространств, если каждое метрическое пространство $S \in \mathscr{S}$ с $\operatorname{card} S > n+k$ может быть изометрически погружено в M всякий раз, когда такое погружение возможно для любого $X \subset S$ с $\operatorname{card} X \leqslant n$. Пространство M имеет *порядок конгруентности* n относительно $\mathscr{S}$, если $(n, 0)$ — его индекс конгруентности. (Отметим близость этих понятий с теми, которые связаны с теоремой Хелли.) Известно, что E^n (с евклидовой метрикой) и евклидова n-мерная сфера S^n (с геодезическим расстоянием) имеют порядок конгруентности $n+3$ относительно класса всех метрических пространств (см. Блюменталь [3], § 38, 39). В 6.13 круги характеризовались среди плоских выпуклых фигур тем, что они имели порядок конгруентности 3 относительно класса $\mathscr{P}$ всех плоских множеств. Л. Келли [1] замечает, что эллипсы, отличные от кругов, не имеют конечного порядка конгруентности. Было бы интересно охарактеризовать все выпуклые фигуры с порядком конгруентности k при $k > 3$.

Более алгебраический характер имеет задача определения индексов конгруентности различных кривых в E^2. Хотя эта задача в некоторых немногочисленных случаях была проанализирована (см. Л. Келли [1], Блюменталь [3]), она до сих пор не решена даже для всех конических сечений в E^2. Известно, что каждое коническое сечение имеет индексы конгруентности (6,0) и (5,1), но неизвестно, имеет ли оно индекс (5,0). Вопрос ставится так:

Предположим, что Q — коническое сечение в E^2, X — множество из шести точек в E^2 и для каждого

$x \in X$ множество $X \setminus \{x\}$ может быть движением помещено в Q. Должно ли Q содержать изометрический образ всего X? (Задача тривиальна, если Q — парабола; по поводу случая, когда Q — эллипс, см. Зейдель и ван Волленховен [1].)

* * * *

Эквиаффинные преобразования переводят эллипсоиды в E^n в эллипсоиды равного объема. Имеет место следующий основной факт:

6.15. *Для каждого выпуклого тела C в R^n существует единственный описанный эллипсоид наименьшего объема и единственный вписанный эллипсоид наибольшего объема.*

Существование эллипсоидов тривиально; единственность первого из них хорошо известна с тех пор как К. Лёвнер использовал ее в своих лекциях; единственность второго, по-видимому, независимо получена Данцером и Загускиным. Относительно доказательства и применений см. Данцер, Лаугвиц, Ленц [1], Загускин [1] и Фирей [1][1]).

Будем далее говорить, что выпуклое тело C обладает *свойством* $\mathfrak{L}$, если его *эллипсоид Лёвнера* имеет объем $\leqslant 1$; *свойством* $\mathfrak{L}_k$, если $\operatorname{conv} X$ обладает свойством $\mathfrak{L}$ при каждом $X \subset C$ с $\operatorname{card} X < k$; *свойством* $\mathfrak{J}$, если его *вписанный эллипсоид* наибольшего объема имеет объем $\geqslant 1$; *свойством* $\mathfrak{J}_k$, если всякое пересечение менее чем k полупространств, каждое из которых содержит C, обладает свойством $\mathfrak{J}$. В этих обозначениях справедливо следующее:

6.16. *Если C — выпуклое тело в R^n, то из $C \in \in \mathfrak{L}_{(n+1)(n+2)/2}$ следует $C \in \mathfrak{L}$.*

6.17. *Если C — выпуклое тело в R^2, то из $C \in \mathfrak{J}_6$ следует $C \in \mathfrak{J}$.*

---

[1]) См. также, например, книги Буземан и Келли [1] и Буземан [2]. — *Прим. ред.*

При $n=2$ эти результаты принадлежат Беренду [1], [2], который дал также точное описание, как должны располагаться 3, 4, 5 точек на окружности [соответственно, касательных к окружности] для того, чтобы круг был эллипсоидом Лёвнера [соответственно, вписанным эллипсоидом] для многоугольника, определяемого этими точками [соответственно, касательными, проведенными через эти точки]. Главный результат 6.16 получен Джоном [1]; его метод использования множителей Лагранжа можно применить для обобщения 6.17 на большее число измерений.

* * * *

Мы переходим теперь к понятиям и результатам, которые являются в некотором смысле полярными к некоторым рассмотренным выше вопросам. Эта *полярность*, которую уже можно усмотреть, сравнивая результаты Робинсона (6.13) и Сантало (6.14), выражается в определенном соответствии между точками, с одной стороны, и гиперплоскостями или полупространствами, с другой. Хотя такое соответствие часто называют *двойственностью*, мы предпочитаем более слабый термин, поскольку это соответствие является гораздо менее жестким, чем настоящая двойственность, известная, например, из проективной геометрии. Здесь нет точного *принципа двойственности*, есть только сильное *ощущение двойственности*. Это ведет к новым интересным результатам и задачам; однако есть много верных утверждений, для которых полярные утверждения неверны. Часто даже неясно, как «дуализировать» данную задачу. По-видимому, нет полярного двойника к утверждению 6.3, но полярным утверждением для 6.2 служит результат 6.18, являющийся следствием теоремы 2.1:

6.18. *Если семейство $\mathscr{K}$ замкнутых полупространств в R^n имеет ограниченное пересечение и каждое пересечение $n+1$ из этих полупространств содержит некоторый транслят выпуклого тела C, то п $\mathscr{K}$ также содержит некоторый транслят C.*

Теперь рассмотрим выпуклое тело C в R^n и связанное с ним C-расстояние $\| \ \|_C$, определенное как в 6.4+. По определению C-расстояние между двумя параллельными гиперплоскостями H и H' равно

$$\inf \{\|x - x'\|_C : x \in H,\ x' \in H'\},$$

или, что эквивалентно,

$$\|H,\ H'\|_C := \sup \{2\alpha \geqslant 0\text{: некоторый транслят тела } \alpha C \text{ может быть заключен между } H \text{ и } H'\}.$$

Далее, *С-ширина* ($\mathrm{width}_C F$) ограниченного множества $F \subset E^n$ задается равенством

$$\mathrm{width}_C\, F = \inf \{\|H,\ H'\|_C : F \text{ лежит между } H \text{ и } H'\}.$$

Теперь вспомним определение 6.4 постоянной Юнга и, заменив $\subset$ на $\supset$, определим *постоянную Бляшке* B_C тела C так:

$$B_C = \sup \{\sigma > 0\text{: каждое выпуклое тело } Y \ C\text{-ширины 2 содержит некоторый транслят тела } \sigma C\}.$$

Для 6.5 полярным двойником является следующее утверждение:

6.19. *Если C — выпуклое тело в R^n, то $B_C \geqslant 2(n+1)^{-1}$, когда C центрально симметрично, и $B_C \geqslant 1/n$ в остальных случаях.*

Доказательство. Согласно 6.18, симплекс T наибольшей ширины, который может быть описан вокруг C, имеет ширину $2/B_C$. Если $C = -C$, то хотя бы одна из гиперплоскостей, ограничивающих T, будет не дальше от начала координат, чем центр тяжести T. Таким образом, $\mathrm{width}_C T \leqslant n+1$ и $B_C \geqslant 2(n+1)^{-1}$. Для получения второй половины 6.19 воспользуемся рассуждением, полярным к использованному Грюнбаумом [8] для J_C. Так как (при $C^* = (C + (-C))/2$) всегда $\| \ \|_{C^*} = \| \ \|_C$, то из уже установленного неравенства и определения J_{C^*} следует, что каждое выпуклое тело C-ширины 2 содержит транслят тела $2(n+1)^{-1} J_{C^*}^{-1} C$. Но $J_{C^*} \leqslant 2n(n+1)^{-1}$, а следовательно, $B_C \geqslant 1/n$.

Первая часть 6.19 была доказана сначала Лейхтвейсом [1], а позднее также Эглстоном [2][1]. Для симметричного случая Лейхтвейс показал[2], что $B_C = 2(n+1)^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует такой симплекс T, что $2C \subset T + (-T)$ и $(n+1)T$ описан около $2C$ (подразумевается, что начало координат является центром T); симплекс T может служить в качестве Y и наоборот (с точностью до переноса). Значит, для общего случая $B_C = 1/n$ тогда и только тогда, когда C есть симплекс (при этом Y — транслят тела $-C$).

Вспомним, что J_C достигает своей нижней границы 1 тогда и только тогда, когда C — параллелотоп. Полярная ситуация совершенно другая; Эглстон [2] доказал следующее:

6.20. $B_C = 2/3$ *для каждого центрального симметричного тела* C *в* E^2.

При $n=3$ условия Лейхтвейса легко проверяются для параллелепипедов, аффинно правильных октаэдров, эллиптических цилиндров и центрально симметричных двойных конусов с выпуклым основанием.

Для больших n точные верхние границы неизвестны; поскольку мы можем судить, они могут даже достигаться при $C = B^n$ (6.21). Для этого евклидова случая постоянная Бляшке есть ширина правильного симплекса, описанного около B^n; при этом каждая из реализующих ширину параллельных опорных гиперплоскостей содержит около половины вершин. Этот случай был разобран Бляшке [1] для $n=2$, а в общем случае Штейнхагеном [1], вычисления которого позднее были упрощены Герике [1]. Принадлежащий этим авторам результат формулируется так:

---

[1]) Ср. Сорокин [2]. — *Прим. ред.*

[2]) В действительности он не предполагает симметрии. Его «ширина Минковского» может быть определена в наших терминах как $\mathrm{width}_{\mathrm{conv}(C \cup (-C))}$. Аналогично различию между J_C^* и J_C в 6.4 и 6.5 результат Лейхтвейса можно сформулировать так: $B_C^* \geqslant 2(n+1)^{-1}$ для каждого выпуклого тела C с $0 \in \mathrm{int}\, C$. Поскольку $C \cup (-C)$ симметрично и содержит C, общий случай теоремы Лейхтвейса получается из симметричного.

6.21. *Если B^n есть n-мерный евклидов шар, то*

$$B_{B^n}=\begin{cases}\sqrt{n+2}/(n+1) & \text{при четном } n,\\ 1/\sqrt{n} & \text{при нечетном } n.\end{cases}$$

Как заметил Штейнхаген, при $n \geqslant 3$ существует много подмножеств правильного симплекса $T \subset E^n$, имеющих одну и ту же евклидову ширину и одну и ту же вписанную сферу. Из его или Герике вычислений, по-видимому, можно заключить, что каждое экстремальное множество (для B_{B^n}) принадлежит правильному симплексу той же ширины и с тем же радиусом вписанной сферы.

В своей работе, посвященной B_{B^2}, Бляшке [1] отмечает еще одно следствие теоремы Юнга:

6.22. *В E^n каждое множество постоянной ширины* 2 *содержит сферу радиуса* $2-\sqrt{2n(n+1)^{-1}}$.

По-видимому, трудной является задача определения наибольшего числа r_n, такого, что в E^n каждое выпуклое тело постоянной ширины 2 содержит *полусферу* радиуса r_n. Ясно, что $r_n<1$ при $n \geqslant 3$, однако Кук [1] и Эглстон [4] доказали, что $r_2=1$. Частичный результат в этом направлении был ранее получен Безиковичем [2].

Теперь мы определим полярные аналоги для постоянной расширения E_C (6.6) и для постоянной $\delta(C)$ (6.11). Пусть $C=-C$ есть выпуклое тело в E^n. Для множества $X \subset E^n$ обозначим $X\text{-}C := \{x : x + C \subset X\}$. По аналогии с 6.6, дадим другое описание постоянной Бляшке и одновременно определим *постоянную сжатия.*

6.23. *Для выпуклого тела $C \subset R^n$ с $C=-C$ постоянная Бляшке B_C [соответственно постоянная сжатия S_C] есть наибольшее число σ, при котором из того, что $\mathscr{H}$ — семейство замкнутых полупространств в R^n с $\cap\mathscr{H} \neq \varphi$, в котором каждые два полупространства из $\{H\text{-}C : H \in \mathscr{H}\}$ $[\{H\text{-}\alpha_H C : H \in \mathscr{H}\}]$ имеют общую точку, следует, что сжатое семейство*

$$\{H\text{-}\sigma C : H \in \mathscr{H}\} \quad [\{H\text{-}\sigma\alpha_H C : H \in \mathscr{H}\}]$$

имеет непустое пересечение.

Нас интересуют нижние границы для S_C и значение S_{B^n}.

Наконец, обозначим через $\overline{\delta}(C)$ такое наименьшее число k, что, если Y есть выпуклое тело C-ширины 2, то C может быть покрыто k транслятами Y. Мы предполагаем, что $\overline{\delta}(B^2)=3$; рассмотрение правильного треугольника показывает, что $\overline{\delta}(B^2)>2$. (Относительно других близких вопросов см. обзор Грюнбаума [17] по проблеме Борсука.) Простой подсчет и сравнение объема B^n с объемом правильного симплекса ширины 2 в E^n показывает, что $\overline{\delta}(B^n)>n+1$ для всех достаточно больших n.

§ 7. Теоремы о пересечениях для семейств специального вида

Для каждого множества $X\subset R^n$ и группы G преобразований R^n в себя обозначим через GX семейство $\{gX : g\in G\}$. Особый интерес представляют группа T^n всех параллельных переносов пространства R^n и группа H^n всех положительных гомотетий; эти группы часто обозначаются просто через T и H. В настоящем параграфе собраны известные результаты, касающиеся чисел Ханнера и Галлая для семейств TC и HC различных выпуклых тел C. (Определение этих чисел см. в конце § 4.)

Ханнер [1] доказал следующую основную теорему:

7.1. *Если C — выпуклое тело в R^n, то*

$$\beta_2(TC)=\beta_2(HC)=\begin{cases}\infty, & \text{бесконечности, если } C \text{ — параллелотоп;}\\ 3, & \text{если } C \text{ не параллелотоп, но центрально симметричный многогранник, каждые две грани максимальной размерности которого, не имеющие общих вершин, параллельны;}\\ 2 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Таким образом, C — параллелотоп тогда и только тогда, когда каждое семейство попарно пересекающихся транслятов C имеет непустое пересечение. Ханнер установил также некоторые факты относительно многогранников C специального вида, для которых $\beta_2(TC)=3$ (в 6.8+ мы их называли телами Ханнера), и описал общее строение многих из них. В E^2 вообще нет тел Ханнера, а в E^3 единственными телами Ханнера являются многогранники, аффинно эквивалентные правильному октаэдру.

То, что $\beta_2(T^nC)$ конечно (а следовательно, $\leqslant n$) для каждого выпуклого тела C, не являющегося параллелотопом, было ранее доказано Секефальви-Надем [1]. Для $j>2$ в литературе нет описания выпуклых тел C, для которых $\beta_j(T^nC)\geqslant\aleph_0$.

Работы Ханнера [1] и Секефальви-Надя [1] были стимулированы работой Нахбина [1] о линейных нормированных пространствах E со следующим *свойством распространения*: каковы бы ни были линейное подпространство Y линейного нормированного пространства Z и непрерывное линейное отображение η пространства Y в E, η может быть распространено до непрерывного линейного отображения ζ всего Z в E с $\|\zeta\|=\|\eta\|$. Приведем один из результатов Нахбина:

7.2. *Для нормированного линейного пространства E с единичным шаром U эквивалентны следующие три утверждения*:

E обладает свойством распространения;

каждое семейство попарно пересекающихся шаров в E имеет непустое пересечение (*т. е.* $\beta_2(HU)>$ $>\operatorname{card} HU$);

E эквивалентно пространству всех непрерывных вещественных функций над вполне несвязным компактным хаусдорфовым пространством.

В части своих доказательств Нахбин предполагает, что U имеет крайнюю точку; однако это ограничение было снято Дж. Келли [1]. Результаты такого же рода были позднее получены Аронштайном и Паничпакди [1] для более общих метрических

пространств. См. также Грюнбаум [12], Нахбин [2] и Шёнбек [1], [2].

Равенство $\alpha(TC)=2$ (эквивалентное тому, что $\beta_2(TC)>\operatorname{card} TC$), отвечающее тому случаю, когда C является параллелотопом, обобщается следующей теоремой, доказательство которой сводится к использованию проекций:

7.3. *Если X_1 и X_2 — непустые множества в линейных подпространствах R^{n_1} и R^{n_2}, на которые натягивается пространство $R^{n_1+n_2}$, то*

$$\alpha\left(T^{n_1+n_2}(X_1+X_2)\right)=\max\left\{\alpha\left(T^{n_1}X_1\right),\ \alpha\left(T^{n_2}X_2\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\left(H^{n_1+n_2}(X_1+X_2)\right)=\max\left\{\alpha\left(H^{n_1}X_1\right),\ \alpha\left(H^{n_2}X_2\right)\right\}$$
$$(\leqslant 1+\max\{n_1,\ n_2\},\ \textit{если}\ X_i\ \textit{выпуклы}).$$

Нахбин [2] и другие поставили вопрос о том, будет ли $\alpha(H^nC)=n+1$ для каждого выпуклого тела C в R^n, не представимого в виде декартовой покоординатной суммы тел меньшей размерности. Контрпример к этому предположению (он ранее не был опубликован) построен Данцером. Пусть K — выпуклое тело в R^{n-1}, и пусть f — вещественная функция на $[0, 1]$, неотрицательная, монотонно убывающая и полунепрерывная сверху. Определим

$$C:=\bigcup_{\alpha\in[0,\,1]}\{(x,\ \alpha): x\in f(\alpha)K\}\subset R^{n-1}+R^1=R^n;$$

тогда $\alpha(H^nC)=\alpha(H^{n-1}K)+1$. В частности, $\alpha(H^3P)=3$, если P — пирамида с квадратным основанием в E^3.

Среди всех выпуклых тел в R^n параллелотопы характеризуются свойством (7.1) пересечения их транслятов. Близкую характеристику симплексов получили Роджерс и Шепард [1]:

7.4. *Выпуклое тело C в R^n есть симплекс тогда и только тогда, когда пересечение каждой пары транслятов C пусто, одноточечно или является (положительным) гомотетом C.*

Простое доказательство указали Эглстон, Грюнбаум и Кли [1], обобщение было получено

Шнейдером [1]. Свойство пересечений 7.4 было использовано Шоке [1], [2] для определения бесконечномерных симплексов. (Относительно дополнительных деталей см. Бауер [2] и Кендал [1], а также Альфсен [1]—[3] и Эдвардс [1].)

Прежде чем перейти к задаче Галлая, мы должны упомянуть еще раз о проблеме Хадвигера и Дебруннера [2], о которой говорилось в 4.4 и далее. Кроме определенного там числа $J(r, s, n)$, относящегося к семейству $\mathscr{C}^n$ всех выпуклых множеств в R^n можно рассмотреть число $J_{\mathscr{F}}(r, s, n)$, определенное таким же образом, но в применении к подсемейству $\mathscr{F}$ семейства $\mathscr{C}^n$. Хадвигер и Дебруннер [2] отмечают, что если $\mathscr{P}^n$ — семейство всех параллелотопов в R^n с ребрами, параллельными осям координат, то $J_{\mathscr{P}^n}(r, s, n) \leqslant C^n_{r-s+n}$; кроме того, $J_{\mathscr{P}^n}(r, s, n) = r - s + 1$, если $ns \geqslant (n-1)r + n$. Было бы интересно изучить числа $J_{\mathscr{F}}(r, s, n)$ для семейств $\mathscr{F}$ типа T^nC или H^nC [14]).

* * * *

Наиболее старой задачей типа Галлая (в печати она впервые появилась, видимо, в книге Фейеша Тота [3]; см. по этому поводу Хадвигер [13]) является следующий вопрос самого Галлая: каково наименьшее число k, такое, что k иголками можно проколоть все круги любого семейства $\mathscr{F} := \{B_\iota : \iota \in I\}$ попарно пересекающихся кругов евклидовой плоскости E^2? В наших обозначениях эта задача требует определить число $\gamma_2(HB^2)$. Исходя из рис. 7, Унгар и Секереш заключили, что $\gamma_2(HB^2) \leqslant 7$. В действительности, семи иголок достаточно даже тогда, когда вместо $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_2$ предположено только $B_\iota \cap B_0 \neq \varnothing$ при всех $\iota \in I$, где B_0 — наименьший круг в семействе $\mathscr{F}$. При этом ослабленном предположении, 7 — наилучшее число[1]). Позднее Хеппеш доказал, что $\gamma_2(HB^2) \leqslant 6$. Это число было уменьшено до 5 Стахо [1] и Данцером (неопубликовано). Позже Данцер уменьшил это число до 4, причем как показывают примеры,

[1]) См. рис. 7. — *Прим. ред.*

последний результат является окончательным. Доказательство Данцера еще не опубликовано[1]); относящиеся сюда замечания и примеры имеются у Грюнбаума [9] и Шоппа [1]—[3].

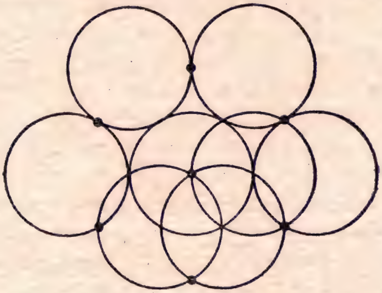

Рис. 7.

Для правильной ориентировки в возможных обобщениях первоначальной задачи Галлая сделаем несколько замечаний:

a) Представляется естественным рассмотреть только семейства выпуклых множеств, так как иначе числа Галлая могут быть бесконечными даже для семейства транслятов (Данцер [3]).

b) Ясно, что $\gamma_j(\mathscr{F})=1$, когда $j \geqslant \alpha(\mathscr{F})$; в частности, если $\mathscr{F}$ состоит из выпуклых множеств в R^n и $j \geqslant n+1$.

c) Если $\mathscr{P}^n$ — семейство всех параллелотопов в R^n с ребрами, параллельными осям координат, то $\gamma_2(\mathscr{P}^n)=1$, причем условие $\gamma_2(TC)=1$ выделяет из всех выпуклых тел C в R^n именно параллелотопы, а $\gamma_2(HC)=1$ выделяет параллелотопы из всех компактных множеств C. (Возможно, что условие $\gamma_2(TC)=1$ характеризует параллелотопы в множестве всех связных компактных тел C.)

[1]) Таким образом, лучшим из опубликованных является результат Стахо [1], который доказал существование для любой системы замкнутых кругов и полуплоскостей $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_2$ (в случае бесконечной системы дополнительно требуется положительность нижней грани радиусов кругов) таких 5 точек, которые задевают даже каждый из соответствующих открытых кругов и полуплоскостей. — *Прим. ред.*

d) Для семейств вида GC, где G — произвольная фиксированная группа линейных преобразований в R^n, содержащая подгруппу переносов ($G \supset T^n$), по-видимому, можно рассчитывать на конечные числа Галлая, лишь если $G \subset H^n$ или C имеет весьма специальное строение.

Имея в виду эти замечания, мы ограничимся рассмотрением чисел $\gamma_j(T^nC)$ и $\gamma_j(H^nC)$, где C — выпуклое тело в R^n (но не параллелотоп) и $2 \leqslant j \leqslant n$. Сначала (7.5—7.8) будут рассмотрены семейства транслятов, затем — семейства гомотетов. Некоторые родственные вопросы, касающиеся покрытий и семейств множеств, смежных с данным, мы обсудим в конце этого параграфа [15]).

Чтобы применить результат 6.3 к задаче Галлая, удобно использовать некоторые специальные обозначения. Пусть $r > 0$; j — натуральное число; Y — ограниченное множество в R^n; C — выпуклое тело в R^n. Определим следующие характеристики:

$$[Y/C] := \min\{k:\ Y \text{ может быть покрыто } k \text{ транслятами тела } C\},$$

называемую *числом покрытия* множества Y относительно C;

$$\operatorname{diam}_C^j Y := \inf\{2\alpha \geqslant 0:\ \text{каждые } j+1 \text{ точки из } Y \text{ могут быть покрыты транслятами тела } \alpha C\},$$

называемую *j-м C-диаметром* множества Y;

$$\delta^j(C,\ r) := \max\left\{[Y/C] : Y \subset R^n \text{ с } \operatorname{diam}_C^j Y \leqslant 2r\right\}.$$

Мы будем писать $\delta^j(C)$ вместо $\delta^j(C,\ 1)$; при этом $\delta^1(C) = \delta(C)$, где $\delta(C)$ определено в § 6. Из 6.2 следует, что при $j \geqslant n$ всегда $\operatorname{diam}_C^j Y = \operatorname{diam}_C^n Y$, т. е. диаметру описанной около Y окружности (при задающем метрику единичном круге C). Хотя $\operatorname{diam}_C^j Y = \operatorname{diam}_{-C}^j Y$ при $j = 1$ для всех C и Y, однако при $j > 1$ это уже, вообще говоря, будет неверно. Однако всегда, разумеется, $\operatorname{diam}_C^j Y = \operatorname{diam}_{-C}^j (-Y)$ и потому $\delta^j(C, r) = \delta^j(-C, r)$ при всех j, C, r.

В соединении с 6.3 данные выше определения сразу ведут к следующим результатам:

7.5. *Если C — выпуклое тело в R^n, $F \subset R^n$, $\mathcal{F}$ — семейство транслятов $\{x+C : x \in F\}$, то $\mathcal{F} \in \mathfrak{D}_j$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{diam}^{j-1}_{-C} F \leqslant 2$.

7.6. *Для выпуклого тела C в R^n j-е число Галлая семейства TC всех транслятов тела C характеризуется равенством*

$$\gamma_j(TC) = \delta^{j-1}(-C) = \delta^{j-1}(C);$$

поэтому оно не больше, чем число транслятов C, необходимых для покрытия тела C, раздутого с коэффициентом подобия, равным j-й постоянной Юнга, т. е.

$$\gamma_j(TC) \leqslant [(J^j_C)\, C / C].$$

(Постоянные Юнга J^j_C были определены в 6.7+.)

Таким образом, задача Галлая для транслятов эквивалентна задаче о покрытии и вычислении чисел $\delta^{j-1}(C)$. При произвольном j существенные результаты достигнуты пока только для евклидова шара $C = B^n$ (они получаются из результатов Данцера 6.8), а именно[1]:

7.7. $$\delta^{j-1}(B^n) \leqslant \left[\sqrt{\frac{nj}{(n+1)(j-1)}}\, B^n / B^n\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{(n+2)^3}{3}\left(\frac{j+\sqrt{j}}{j-1}\right)^{n-1}}.$$

(См. 6.12 для случая $j=2$; относительно использованных методов и значений j, близких к $n+1$, см. 7.14 и далее.)

Для тел C более общего вида основные результаты принадлежат Грюнбауму; они ограничиваются случаем $j=1$:

---

[1]) Возможно, что в настоящее время эта граница уже превзойдена с помощью метода Эрдёша и Роджерса [1] (см. сноску к 7.10).

7.8. *Для выпуклого тела C*

$\delta^1(C)=2$, *если C — аффинно правильный шестиугольник в R^2;*

$\delta^1(C)\leqslant 3$, *если $C=-C\subset R^2$;*

$\delta^1(C)\geqslant n+1$, *если $C=-C\subset R^n$ и C строго выпукло.*

Второй результат имеется в статье Грюнбаум [3], остальные в статье Грюнбаум [9] (для $n=2$). Кроме этого почти ничего не известно. С одной стороны, мы не знаем примеров n-мерных тел C, для которых $\delta^1(C)>n+1$. С другой стороны, для произвольных C и n есть только очень грубые верхние оценки чисел $\gamma_j(T^nC)$ и для больши́х значений j нет даже явных численных оценок для $\gamma_j(T^nC)$, лучших, чем установленные ниже для $\gamma_2(H^nC)$.

Очень мало известно и о величинах $\gamma_j(TC)$ и $\gamma_j(TC^*)$, где C^* — симметризация Минковского тела C $(C^*:=(C+(-C))/2)$. Рассмотрим множество F и соответствующие этому множеству семейства транслятов $\mathcal{F}=\{x+C:x\in F\}$ и $\mathcal{F}^*=\{x+C^*:x\in F\}$ тел C и C^*. Элементарные расчеты показывают, что

$$\text{если } j=2, \text{ то } \mathcal{F}\in\mathfrak{D}_j \text{ тогда и только тогда, когда } \mathcal{F}^*\in\mathfrak{D}_j, \qquad (*)$$

но для всех $j>2$ ни одно из этих утверждений не влечет другое. Значит никакое неравенство между $\delta^{j-1}(C)$ и $\delta^{j-1}(C^*)$ не является тривиальным, хотя мы не знаем ни одного тела C, для которого $\delta^{j-1}(C^*)>\delta^{j-1}(C)$. Если S — треугольник в R^2, то $\delta^1(S)=3>2=\delta^1(S^*)$.

Обратимся теперь к задаче Галлая для семейств гомотетов. Здесь, известно еще меньше, чем в случае транслятов. Геометрическая ситуация настолько сложна, что представляется невозможным найти *эквивалентную* задачу о покрытии. Однако связанные с покрытиями два различных подхода должны вести к грубым верхним оценкам.

Одна возможность заключается в обобщении упомянутого выше подхода Унгара и Секереша. Для выпуклого тела C в R^n обозначим через $\bar{\gamma}(C)$ наименьшее целое число j, такое, что если $X\subset R^n$, $\alpha_x\geqslant 1$ и

$(x+\alpha_x C)\cap C\neq\varnothing$ при любом $x\in X$ и

$$\mathcal{F}:=\{C\}\cup\{x+\alpha_x C: x\in X\},$$

то семейство множеств $\mathcal{F}$ допускает j-разбиение (т. е. существует некоторое j-точечное множество, пересекающее все множества из $\mathcal{F}$). Ясно, что $\gamma_2(HC)\leqslant\bar\gamma(C)$ и $\gamma_2(H_\pm C)\leqslant 2\bar\gamma(C)$, где $H_\pm$ есть группа *всех* гомотетий в R^n. Далее, при таком $\mathcal{F}$, как описано, $z_x\in(\alpha_x+C)\cap C$ и $y_x:=\alpha_x^{-1}(x-z_x)+z_x$; как легко проверить, $y_x+C\subset x+\alpha_x C$ и $(y_x+C)\cap C\neq\varnothing$. Таким образом, $\bar\gamma(C)$ может быть определено другим способом через семейства *транслятов* тела C. Отсюда с помощью рассуждения, аналогичного приведенному в 6.3, получается, что $\bar\gamma(C)$ равно числу покрытия $[C+(-C)/C]$. Таким образом, мы установили, что

7.9. $\gamma_2(HC)\leqslant\bar\gamma(C)=[C+(-C)/C]$.

Основные известные результаты о функции $\bar\gamma$ могут быть сформулированы следующим образом (Данцер [3], [4], Грюнбаум [9]):

7.10. *Если C — выпуклое тело в R^n, то $\bar\gamma(C)\leqslant\leqslant(4n+1)^n$, причем в случае, когда C центрально симметрично, $\bar\gamma(C)\leqslant 5^n$* [1]).

7.11. *Если C — выпуклое тело в R^2, то $\bar\gamma(C)\geqslant 7$, если C строго выпукло, и $\bar\gamma(C)\leqslant 7$, если аффинно правильный шестиугольник A может быть вписан в C таким образом, что C имеет параллельные опорные прямые в противоположных вершинах шестиугольника A.*

---

1) Как указал Роджерс в письме к авторам, эти оценки могут быть заменены на $\bar\gamma(C)\leqslant 3^n\delta_n$ в симметричном случае и на $\bar\gamma(C)\leqslant 3^{n+1}2^n(n+1)^{-1}\delta_n$ в общем случае, где $\delta_n:=n\ln n+$ $+n\ln\ln n+5n$. Здесь δ_n — плотность, получаемая при покрытии R^n транслятами выпуклого тела (см. Роджерс [1], [3]), а $\dfrac{3\cdot 2^n}{n+1}$ — оценка числа $\dfrac{\operatorname{vol}((1/3)C+(2/3)(-C))}{\operatorname{vol}(C)}$, получаемая при рассмотрении $(n+1)$-мерного выпуклого тела, связанного с C (Роджерс и Шепард [2]).

Чтобы показать, что $\bar{\gamma}(C) \leqslant 5^n$, когда $C = -C$, строим покрытие тела $2C$, помещая сначала в $\frac{5}{2} C$ как можно больше транслятов тела $\frac{1}{2} C$, а затем раздувая каждый из них с коэффициентом подобия 2. Для произвольного C положим, что центр тяжести C находится в начале координат и $K := C \cap (-C)$. Тогда $C \subset nK$, согласно результату Минковского [1] и Радона [1] (или в силу 2.7), а потому $C + (-C) \subset \subset 2nK$. Покрытие тела $2nK$ транслятами тела K приводит к неравенству $\bar{\gamma}(C) \leqslant (4n+1)^n$. Первое неравенство в 7.11 следует из возможности так расположить шесть транслятов тела C, что они все будут смежны с C и циклично смежны между собой. По поводу деталей доказательств 7.10 и 7.11, соответствующих примеров и значения величины $\gamma_2(HC)$ для некоторых частных случаев $C \subset R^2$ см. Данцер [2], [4]; относительно случая $C = -C$ см. также Грюнбаум [9]. Данцер [4] указывает условия, при которых семейство $\mathscr{F}$ в R^2 имеет 7-точечное множество, пересекающее *внутреннюю область* каждого множества $\mathscr{F}$ [1]).

Для евклидова шара K идея о сведении задачи оценки числа $\gamma_2(K)$ к рассмотрению числа $\bar{\gamma}(K)$ была распространена Данцером [3] на числа $\gamma_j(K)$. С помощью общей теоремы о пересечении метрических шаров (приведенной ниже; см. 9.9) он доказал следующую важную лемму:

7.12. *Пусть $2 \leqslant j \leqslant n+1$ и $\mathscr{K}$ — семейство евклидовых шаров в E^n, причем $\mathscr{K} \in \mathfrak{D}_j$. Пусть, далее, C_0 — пересечение $j-1$ шаров из $\mathscr{K}$, имеющее наименьший (евклидов) диаметр среди всех таких пересечений. Предположим, что*

$$K \cap C_0 \neq \varnothing \qquad (\textit{при всех } K \in \mathscr{K}). \qquad (*)$$

Тогда E^n содержит такую плоскость F размерности $n+2-j$, что:

---

[1]) Ср. с подстрочным примечанием на стр. 89. — *Прим. ред.*

$F \cap C_0$ — евклидов шар;
$\operatorname{diam} C_0 = \operatorname{diam}(F \cap C_0) \leqslant \operatorname{diam}(F \cap K)$ *при всех* $K \in \mathscr{K}$;
$(F \cap K) \cap C_0 \neq \varnothing$ *при всех* $K \in \mathscr{K}$.

Другими словами, если $\mathscr{K} \in \mathfrak{D}_j$ и $(*)$ имеет место, то пересечение с соответствующей плоскостью уменьшает размерность на $j-2$ и порождает опять семейство евклидовых шаров, в котором каждый пересекается с наименьшим. Следовательно:

7.13. $\gamma_j(HB^n) \leqslant \bar{\gamma}(B^{n+2-j})$.

Было бы интересно узнать, существует ли при $1 \leqslant i \leqslant j-2$ для каждого семейства $\mathscr{K} \in \mathfrak{D}_j$ евклидовых шаров в E^n такая плоскость F коразмерности i, что семейство пересечений $\mathscr{G} := \{F \cap K : K \in \mathscr{K}\}$ обладает свойством $\mathfrak{D}_{j-i}$ (или по меньшей мере $\mathfrak{D}_{j-i-1}$) и некоторый наименьший из шаров семейства $\mathscr{G}$ пересекает все остальные. В частности, как обстоит дело в случае $i = j-3$?

Второй и более простой подход к задаче Галлая для семейств HC был недавно использован Данцером (и еще не опубликован). Рассмотрим семейство $\mathscr{F} := \{x + \alpha_x C : x \in X\}$ гомотетов тела C, где $C \in \mathscr{F}$ и $\alpha_x \geqslant 1$; пусть, далее, $\varepsilon > 0$. При каждом k семейство $\mathscr{F}$ может быть разбито на k подсемейств

$$\mathscr{F}_i(k, \varepsilon) := \{x + \alpha_x C : x \in X,\ (1+\varepsilon)^{i-1} \leqslant \alpha_x < (1+\varepsilon)^i\} \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

остальная часть $\mathscr{F}'(k, \varepsilon)$ состоит из бóльших шаров. Если $\mathscr{F} \in \mathfrak{D}_j$, то каждое из k семейств $\mathscr{F}_i(k, \varepsilon)$ может быть проколото $\delta^{j-1}(C, 1+\varepsilon)$ или менее уколами, а $\mathscr{F}'(k, \varepsilon)$ можно проколоть сравнительно небольшим количеством μ уколов. (Если тело C гладкое и $(1+\varepsilon)^k$ достаточно велико, то $\mu = n+1$.) Отсюда следует, что

$$\gamma_j(HC) \leqslant k\delta^{j-1}(C, 1+\varepsilon) + \mu \leqslant k\left[(1+\varepsilon)(J_C^i)C/C\right] + \mu.$$

При больших n это должно дать значительно лучшие результаты, чем неравенства, упомянутые выше, кроме случаев, когда $C = B^n$ и j близко к n. В частности,

этот метод приводит к неравенству

$$\gamma_j(HB^n) \leqslant k\left[(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{nj}{(n+1)(j-1)}}\, B^n/B^n\right] + \\ + \left[\left(1+\frac{1}{(1+\varepsilon)^k}\right) B^n/B^n\right],$$

где лучший численный результат получается при

$$(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{nj}{(n+1)(j-1)}} \approx 1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)^k}.$$

Конечно, все оценки сверху для $\gamma_j(HB^n)$, которые здесь указывались, очень грубы. Нам неизвестны примеры, противоречащие оценке $\gamma_j(HB^n) \leqslant n+4-j$, а также не известны тела C, для которых $\gamma_j(TC) > n+3-j$. Что касается оценок снизу для $\gamma_j(HC)$, то при $j>2$ мы о них совсем ничего не знаем.

* * * *

При попытках найти значения или оценки сверху для чисел Галлая $\gamma_j(T^nC)$ и $\gamma_j(H^nC)$ мы приходили к различным задачам о покрытиях. При произвольных C и n трудность связана с тем обстоятельством, что тела, которые должны быть покрыты транслятами тела C, сами немногим больше C.

В частном случае $C=B^n$ есть больше надежды на успех. Напомним, что, согласно 7.6, $\gamma_j(TC) = \delta^{j-1}(C) \leqslant \left[\left(J_C^j\right) C/C\right]$, и значит (см. 7.7)

$$\gamma_j(TB^n) \leqslant \left[\sqrt{\frac{nj}{(n+1)(j-1)}}\, B^n/B^n\right].$$

С другой стороны, согласно 7.9, имеем $\gamma_2(HC) \leqslant \bar{\gamma}(C) = [C+(-C)/C]$, откуда

$$\gamma_2(HB^n) \leqslant [2B^n/B^n].$$

Таким образом, нам надо искать экономные покрытия тела rB^n транслятами B^n, причем особенно интересны случаи $1 < r \leqslant \sqrt{2}$ и $r=2$. Как заметил Данцер, эта задача (почти очевидным образом) эквивалентна аналогичной задаче для сферы S^{n-1}:

7.14. *Если* $\zeta_n(\alpha)$ — *минимальное число сферических шапок (сферического) радиуса* α, *которые покрывают единичную сферу* S^{n-1} *в* E^n, *то*

$$[(\operatorname{cosec}\alpha)\,B^n/B^n]\begin{cases} =\zeta_n(\alpha) & \text{при } \dfrac{\pi}{2}>\alpha\geqslant\dfrac{\pi}{4},\\[2mm] \leqslant\zeta_n(\alpha)+1 & \text{при } \dfrac{\pi}{4}>\alpha\geqslant\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$$

При малых n и некоторых специальных значениях α можно воспользоваться определенными частными покрытиями для получения оценок сверху. Так, например, Данцер [3] показал, что

7.15. $\zeta_2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=6$, $\zeta_3\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 20$ *и* $\zeta_4\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 70$, *откуда* $\bar{\gamma}(B^3)\leqslant 21$ *и* $\bar{\gamma}(B^4)\leqslant 71$.

(По поводу определения $\bar{\gamma}$ см. 7.9 [16]).)

При бо́льших n и произвольных α можно вместо покрытий рассматривать *упаковки*, считая радиус сферических шапок равным $\alpha/2$, и использовать метод Блихфельдта (см. Ранкин [1]). Этот метод приводит к следующему результату (Данцер [3]) [1]):

7.16. *При* $n\geqslant 3$ *и* $1<r\leqslant 2$

$$[rB^n/B^n]<\frac{1}{2}\left((n-2)\sqrt{r^2-1}+3r\right)\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{r\sqrt{r^2-1}}}\times$$
$$\times\sqrt{\left(r\sqrt{r^2-1}+r^2\right)^{n-1}}.$$

По теореме Роджерса [2] плотность упаковки равных шаров в E^n не может превышать плотности их упаковки в правильном симплексе, вершины которого совпадают с центрами шаров. Аналогичный результат для упаковок в S^{n-1} привел бы к небольшому улучшению 7.16. (Этот результат получен Фейешем Тотом [2], [3] для $n=3$, но не доказан для общего случая.)

Оценки снизу для $[rB^n/B^n]$ особенно интересны в случае $r=2$, поскольку мы так мало знаем даже о $\gamma_2(HB^n)$. Рассматривая отношение $(n-1)$-мерной

[1]) Возможно, что эта оценка уже уточнена с помощью метода Эрдёша и Роджерса [1] (см. сноску к 7.10).

поверхности всей сферы S^{n-1} к аналогичной мере сферической шапки радиуса $\pi/6$, Данцер [3] показал, что при $n \geqslant 3$ всегда $\zeta_n\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{\frac{3}{2} n\pi}\, 2^{n-1}$. По Коксетеру, Фью и Роджерсу [1] плотность *покрытия* E^n равными шарами не может быть меньше чем плотность покрытия правильного симплекса [17]). Если бы то же было установлено для покрытий сферы S^{n-1}, то последнее неравенство можно было бы улучшить на множитель порядка $n/2$. (При $n=3$ этот результат получен Фейешем Тотом [1], [3]; однако в общем случае он пока не доказан. Отсюда, в частности, следует, что $\zeta_3(\pi/6) \geqslant 19$.) [18]).

Хадвигер [11] ставит вопрос о том, сколько транслятов C_ι $(\iota \in I)$ выпуклого тела C в E^n могут быть расположены так, чтобы каждый из них пересекал C, но никакие два из них не имели общей внутренней точки. (Аналогичная задача с $C_\iota \cap C_\lambda \neq \varnothing$ вместо $C_\iota \cap C \neq \varnothing$ рассматривалась Данцером и Грюнбаумом [1] [19]).) Из (*) в 7.8+ следует, что максимальное число здесь одно и то же для C и для C^*, после чего простое рассуждение показывает, что максимум достигается только тогда, когда C само включается в набор C_ι. Таким образом, число Хадвигера равно $\tilde{\gamma}(C)+1$, где $\tilde{\gamma}(C)$ — максимальное число транслятов C, которые можно расположить так, чтобы все они были смежными с C и попарно не имели общих внутренних точек. (Два множества *смежны*, если пересекаются их замыкания, но не их внутренние области.) Если C гладко, то $\tilde{\gamma}(C)$ служит тривиальной оценкой снизу для $\bar{\gamma}(C)$.

Известен следующий результат:

7.17. *Для каждого выпуклого тела C в R^n имеют место оценки $n^2+n \leqslant \tilde{\gamma}(C) = \tilde{\gamma}(C^*) \leqslant 3^n - 1$, причем равенство $\tilde{\gamma}(C) = 3^n - 1$ характеризует параллелотоп.*

Неравенство $n^2+n \leqslant \tilde{\gamma}(C)$ было доказано Грюнбаумом [15], который заметил, что всегда найдется $n+1$ транслят x_i+C, которые будут *попарно смежны*;

тогда n^2+n множеств x_i-x_j+C $(i\neq j)$ находятся в требуемом положении относительно C. (См. также Свиннертон-Дайер [1].) Неравенство $\tilde{\gamma}(C)\leqslant\leqslant 3^n-1$, указанное Главкой [1], Хадвигером [11] и Грёмером [1], сразу следует из того соображения, что

$$1+\tilde{\gamma}(C)=1+\tilde{\gamma}(C^*)\leqslant\frac{\operatorname{vol} 3C^*}{\operatorname{vol} C^*}.$$

Характеристический признак параллелотопов принадлежит Грюнбауму [15] для $n=2$ и Грёмеру [1] для произвольного n, причем последний [2] исправляет также одно ошибочное замечание Грюнбаума [15]. По-видимому, аналогичной общей характеристики тех C, для которых $\tilde{\gamma}(C)=n^2+n$, не существует, хотя Грюнбаум [15] показывает, что $\tilde{\gamma}(C)=6$ для *каждого* C в R^2, отличного от параллелограмма. Грюнбаум [15] предполагает, что $\tilde{\gamma}(C)$ четно для всех C.

Было бы интересно изучить числа $\tilde{\gamma}(C)$ для множеств C в R^n, о которых известно лишь, что они гомеоморфны шару B^n. Для случая $n=2$ это было сделано Хальбергом, Левиным и Страусом [1], которые доказали неравенство $\tilde{\gamma}(C)\geqslant 6$ без предположения о выпуклости C.

Задача определения числа $\tilde{\gamma}(B^n)$ — знаменитая и весьма старинная[1]; об ее истории и о имеющихся результатах см. Фейеш Тот [3] для случая $n=3$ и обзор Коксетер [1] для общего случая. В настоящее время наилучшие оценки для $\tilde{\gamma}(B^n)$ получены методами, охарактеризованными выше в связи с $\bar{\gamma}(B^n)$. Подставляя $r=(4/3)^{1/2}$ (соответствующее значению $\alpha/2=\pi/6$) в неравенство 7.16 для получения оценки сверху и вычисляя отношение объемов для получения оценки снизу, имеем

$$\textbf{7.18.}\quad \frac{\sqrt{(2n+11)\pi}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2}\leqslant\tilde{\gamma}(B^n)\leqslant \leqslant\frac{n+4}{4}\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}\,2^{(n-1)/2}.$$

[1]) Она интересовала еще И. Ньютона. — *Прим. ред.*

§ 8. Другие теоремы о пересечениях

Собранные в этом параграфе результаты сравнительно слабо связаны с теоремой Хелли, но все они относятся к свойствам пересечений выпуклых множеств в R^n. Часть этих результатов обязана своим происхождением знаменитой «проблеме четырех красок» (см. 8.6—8.8) [1]. Два выпуклых тела в R^n мы называем *соседними*, если их пересечение имеет размерность $n-1$; семейство выпуклых тел называем *соседствующим*, если каждые два его члена соседние. По очевидным соображениям именно такие семейства вызывают интерес в связи с проблемой четырех красок и родственными ей задачами. Соседствующее семейство выпуклых (или значительно более общих) тел в E^2 может иметь не больше четырех членов. С другой стороны, Титце [1] ответил на поставленный Штекелем вопрос, построив в E^3 бесконечное соседствующее семейство выпуклых многогранников. (См. обзор Титце [2], касающийся связанных с этим вопросов.) Крум независимо поставил тот же вопрос около четырех лет спустя, и второе построение было дано Безиковичем [1]. Более детальное изучение свойств пересечения выпуклых многогранников в R^n принадлежит Радо [3] и Эглстону [1], которые доказали следующие теоремы (первое утверждение в обоих случаях принадлежит Радо, второе — Эглстону):

8.1. *Если целое число* $m \leqslant \frac{n+1}{2}$, *то в* R^n *существует такое бесконечное семейство* $\mathcal{P}$ *выпуклых многогранников, что для всех* j, *где* $1 \leqslant j \leqslant m$, *каждые* j *многогранников семейства* $\mathcal{P}$ *имеют* $(n-j+1)$-*мерное пересечение. Если* $m > \frac{n+1}{2}$, *то такого семейства многогранников в* R^n *не существует.*

---

[1]) Этой популярной проблеме (см., например, Дынкин и Успенский [1]) посвящена монография Оре [1] (касающаяся, впрочем, лишь соответствующей проблемы в E^2). — *Прим. ред.*

8.2. *В R^n существуют такие $n+2$ выпуклых многогранника, что каждые j из этих многогранников (каково бы ни было j в интервале $1 \leqslant j \leqslant n$) имеют $(n-j+1)$-мерное пересечение; однако в R^n не существует $n+3$ многогранников, обладающих этим свойством.*

Эти результаты о соседствующих семействах многогранников тесно связаны с многогранниками Гейла [3], [5] (см. также Каратеодори [2], Моцкин [3] и 3.9 выше), каждые две вершины которых соединены ребром многогранника. Пусть, например, P_k — выпуклый многогранник в R^4, имеющий k вершин и такой, что каждый отрезок, соединяющий две его вершины, является ребром P_k. Тогда двойственный многогранник Q_k имеет k трехмерных граней, каждые две из которых пересекаются по двумерной грани многогранника Q_k. Пусть K есть трехмерная грань многогранника Q_k; спроектируем все остальные грани Q_k на K из центра z, где точка z является внешней для K, но очень близка к (соответствующей) внутренней точке K. Получившаяся конфигурация состоит из $k-1$ трехмерных многогранников, объединение которых есть выпуклый многогранник K; каждые два из этих многогранников имеют общую двумерную грань.

В построениях Титце, Безиковича и Радо число вершин или граней рассматриваемых многогранников ничем не ограничено. Но Бейджемил [1] поставил для R^3 вопрос о максимальном числе k *тетраэдров* в соседствующем семействе; он доказал, что $8 \leqslant k \leqslant 17$ и предположил, что $k=8$. Бестон [1] недавно доказал, что $k \leqslant 9$, но вопрос о том, какое из чисел 8 или 9 является окончательным значением k, остается пока нерешенным [1]). Почти ничего не сделано применительно к следующей более общей задаче: требуется в случае $j \geqslant n+1$ определить максимальное число $N(n, j)$ выпуклых «j-вершинников», которые могут образовывать в R^n соседствующее семейство. (Обобщая рассуждения Бейджемила [1], можно пока-

[1]) См. также книгу Бестон [2] (Бестон полагает, что истинное значение k равно 8). — *Прим. ред.*

зать, что всегда $N(n, j) < \infty$.) В формулировке этого вопроса можно дополнительно потребовать, чтобы все рассматриваемые многогранники были аффинно или комбинаторно эквивалентны некоторому заданному; но даже и здесь в литературе нет ничего, кроме результатов Бейджемила и Бестона. (Относительно близких результатов, касающихся трансляционной эквивалентности правильных тетраэдров, см. Сверчковский [1].)

* * * *

Другая группа результатов имеет истоки в теории вероятностей. Семейство $\mathscr{G}$ подмножеств множества E называется *независимым в* E, если для каждого подсемейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$

$$\pi\mathscr{F} \cap \pi\{E \setminus G : G \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{F}\} \neq \varnothing.$$

Определим *ранг* семейства $\mathscr{F}$ множеств как точную верхнюю границу мощностей независимых подсемейств из $\mathscr{F}$. Тогда результаты А. Реньи, К. Реньи и Шураньи [1] могут быть сформулированы так:

8.3. *Семейство всех открытых параллелотопов в* R^n, *ребра которых параллельны координатным осям, имеет ранг* $2n$.

8.4. *Семейство всех* $(n-1)$*-мерных евклидовых сфер в* E^n *имеет ранг* $n+1$;

8.5. *Если* r_j — *ранг семейства всех открытых выпуклых многоугольных областей в* R^2, *имеющих не более чем* j *сторон, то* $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{r_j}{\log j} = \dfrac{1}{\log 2}$.

Утверждение 8.3 доказывается непосредственно, в то время как 8.4 зависит от оценки максимального числа частей B_k^n, на которые E^n может быть разбито k сферами [20]).

* * * *

Обратимся к вариациям на тему задач Галлая (§ 7) и Хадвигера — Дебруннера [2] (см. 4.4). Некоторые авторы искали условия того, что семей-

ство $\mathscr{F}$ выпуклых множеств в R^n может быть разбито на m подсемейств, каждое из которых имеет непустое пересечение. С другой стороны, Белецкий [1], Радо [4] и Асплунд и Грюнбаум [1] нашли условия, при которых $\mathscr{F}$ *m-окрашиваемо*, т. е. $\mathscr{F}$ может быть разложено на m семейств попарно непересекающихся множеств. Пусть $\mathscr{F}$ есть семейство множеств, а p и q — натуральные числа; через $\gamma_{p,\,q}(\mathscr{F})$ обозначим наименьшее натуральное число r, обладающее следующим свойством: если $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ и каждое подсемейство из p множеств семейства $\mathscr{G}$ является q-окрашиваемым, то $\mathscr{G}$ r-окрашиваемо ($\gamma_{p,\,q}(\mathscr{F}):=\infty$, если такого r нет). В таком случае результату Радо [4] и Белецкого [1] можно придать следующую форму:

8.6. *Если $\mathscr{I}$ — семейство всех интервалов в упорядоченном множестве, то $\gamma_{k+1,\,k}(\mathscr{I})=k$.*

Результат Асплунда и Грюнбаума [1]:

8.7. *Если $\mathscr{R}$ — семейство всех плоских прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям, то $\gamma_{3,\,2}(\mathscr{R})=6$.*

Далее, из теоремы Грёча [1] о раскраске графов [21]) следует, что

8.8. *Для каждого выпуклого тела K в R^2 всегда $\gamma_{3,\,2}(HK)=3$ (здесь HK — семейство всех положительных гомотетов тела K).*

Работа Асплунда и Грюнбаума содержит другие результаты об окрашиваемости различных семейств множеств и постановки нерешенных задач. Следующая общая задача представляется заслуживающей упоминания: Для каких семейств $\mathscr{F}$ выпуклых множеств в R^n и для каких p и q необходимое число красок конечно, т. е. $\gamma_{p,\,q}(\mathscr{F})<\infty$? Как зависит это число от p, q, n? В частности, будет ли $\gamma_{3,\,2}(\mathscr{F})<\infty$, если $\mathscr{F}$ — семейство всех выпуклых тел в R^2? (Бёрлинг [1] доказал, что $\gamma_{3,2}(\mathscr{F})=\infty$, если $\mathscr{F}$ — семейство всех параллелепипедов в R^3 с ребрами, параллельными координатным осям.)

Эти задачи о «раскрашивании» подсказывают следующее обобщение задач типа Галлая, упоминавшихся в конце § 4:

Пусть даны X, $\mathfrak{P}$, $\varkappa$, λ, μ и наложенные на $\mathscr{F}$ условия; требуется определить наименьшую мощность ψ, такую, что каждое удовлетворяющее заданным условиям семейство $\mathscr{F}$, любое подсемейство $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ которого с card $\mathscr{G}<\varkappa+1$ может быть разбито на μ семейств, обладающих порознь свойством $\mathfrak{P}$, также можно разбить на ψ подсемейств, обладающих свойством $\mathfrak{P}_\lambda$.

При этой терминологии результат 8.7 утверждает, что если $\mathfrak{P}$ есть свойство «множества семейства попарно не пересекаются», $X=R^2, \mathscr{F}=\mathscr{R}, \varkappa=3$, $\mu=2, \lambda=\aleph_0$, то $\psi=6$; а 8.6 утверждает, что если X — упорядоченное множество, $\mathscr{F}=\mathscr{I}, \varkappa=k+1$, $\mu=k$ и λ — следующее число за card X, то $\psi=k$.

Нерешенная задача, связанная с первоначальной геометрической задачей Галлая, возникает, если положить, что $X=R^2$, $\mathfrak{P}=\mathfrak{D}$ (непустота пересечения), $\mathscr{F}=TK$ для выпуклого тела $K\subset R^2$, $\varkappa=2k$, $\mu=k$, $\lambda=\aleph_0$. Если K строго выпукло и центрально симметрично, то из результата Грюнбаума [9] следует, что $\psi\geqslant 3n$. Легко проверить, что $\psi\leqslant 8$, если K — круг и $k=2$; Грюнбаум предполагает, что в этом случае $\psi=6$.

* * * *

Отображение φ метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, σ) называется *липшицевым с постоянной Липшица* λ, если $\sigma(\varphi x, \varphi x')\leqslant\lambda\rho(x, x')$ для всех $x, x'\in X$; отображение φ называется *сжатием*, если $\sigma(\varphi x, \varphi x')\leqslant\rho(x, x')$. Различные авторы изучали задачу распространения (на все X с сохранением постоянной Липшица) липшицева преобразования, которое первоначально определяется лишь на подмножестве X. Наиболее ранние работы, связанные с этой тематикой, принадлежат Мак-Шейну [1] и Киршбрауну [1]. Метод Мак-Шейна (а позднее Банаха [1] и Ципсера и Гехера

[1]) дает в некоторых случаях явную формулу для распространения; «поточечный» же метод Киршбрауна, Валентина [1], [2], [3] и Майкла [1] использует одно интересное свойство пересечения. Мы здесь рассмотрим только сжатия, так как общая задача о липшицевом распространении может быть сведена к случаю сжатия, если Y — нормированное линейное пространство.

Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — семейства метрических шаров соответственно в (X, ρ) и (Y, σ). Условимся писать $\mathscr{F} > \mathscr{G}$, если шары обоих семейств могут быть сопоставлены друг другу с помощью одинаковой их индексации так, что радиусы соответствующих шаров равны и расстояние между каждыми двумя центрами шаров семейства $\mathscr{F}$ не меньше, чем расстояние между центрами соответствующих им шаров семейства $\mathscr{G}$. Таким образом, если

$$\mathscr{F} := \{V_\rho(x_\iota, r_\iota) : \iota \in I\}, \quad \mathscr{G} := \{V_\sigma(y_\iota, r_\iota) : \iota \in I\},$$

то

$$\mathscr{F} > \mathscr{G} \Leftrightarrow \rho(x_\iota, x_{\iota'}) \geqslant \sigma(y_\iota, y_{\iota'}) \quad \text{при всех} \quad \iota, \iota' \in I.$$

При этих условиях естественно спросить: будет ли из $\pi\mathscr{F} \neq \varnothing$ вытекать, что $\pi\mathscr{G} \neq \varnothing$; другими словами, если шары семейства $\mathscr{F}$ имеют общую точку, то могут ли они потерять ее в результате отображения, которое лишь сближает центры шаров? Истинное положение дела здесь таково (Валентин [3]):

8.9. *Для метрических пространств X и Y эквивалентны следующие два утверждения:*

каковы бы ни были семейства метрических шаров $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ соответственно в X и Y, при $\mathscr{F} > \mathscr{G}$ из $\pi\mathscr{F} \neq \varnothing$ следует $\pi\mathscr{G} \neq \varnothing$;

каково бы ни было $W \subset X$, каждое сжатие W в Y может быть распространено до сжатия X в Y.

Из 8.9 ясно, что результаты всех упомянутых выше авторов могут быть интерпретированы как теоремы о пересечении, хотя они не всегда так формулировались. По-видимому, нет полной картины того, какие

пары хотя бы пространств Минковского X и Y связаны как требуется в 8.9, хотя Цорн заметил, что для широких классов таких пар никаких дополнительных условий не надо требовать (см. Валентин [3]). Во всяком случае известно следующее:

8.10. *Для каждого из следующих классов условия* 8.9 *удовлетворяются*:

a⁰. X — *произвольное метрическое пространство*, $Y=E^1$;

b⁰. $X=Y=E^n$;

c⁰ $X=Y=S^n$ (*сферические пространства*).

8.11. *Если X и Y представляют собой одно и то же пространство Минковского с единичным шаром U, то условия* 8.9 *удовлетворяются тогда и только тогда, когда U — эллипсоид или параллелотоп.*

Результат 8.11 для двумерного случая принадлежит Грюнбауму [7], а для общего случая Шёнбеку [2]. Доказательство пункта a⁰ теоремы 8.10 принадлежит Мак-Шейну [1], Валентину [1], Банаху [1], Майклу [1], Ципсеру и Гехеру [1] и Шёнбеку [2], обобщавшим его в некоторых направлениях, связанных с математическим анализом (например, для отображений, удовлетворяющих условию Липшица — Гёльдера).

Из 8.10a⁰ следует, что условия 8.9 также удовлетворяются при произвольном X, если Y — пространство всех непрерывных вещественных функций на вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве, в частности, когда Y — пространство Минковского, в котором единичным шаром является параллелотоп (см. 7.1 и 7.2). Случай b⁰ рассмотрен Киршбрауном [1], Валентином [3], Майклом [1], Шёнбергом [1], Грюнбаумом [19] и Шёнбеком [2]; он (как было отмечено Валентином) легко распространяется на случай $X=Y=$полное евклидово пространство [22]). Случай c⁰ разобран Валентином [3], который также [2] установил аналогичный результат для случая, когда $X=Y=n$-мерное

гиперболическое пространство. Теорема Хелли применена Киршбрауном [1] и Валентином [1], [2], [3]; в частности, для доказательства 8.7b^0, согласно теореме Хелли, достаточно рассмотреть семейства, состоящие из $n+1$ шаров. Во всех доказательствах используются аналитические понятия (скалярное произведение и т. д.) — даже в случае $X=Y=E^2$; однако было бы интересно найти более геометричное доказательство. Простейшими доказательствами для 8.10b^0 являются доказательства Шёнберга [1] и Грюнбаума [19], получивших обобщение 8.12, включающее (при соответствующем выборе x_i, y_i, α, β) обе теоремы Киршбрауна и недавнюю теорему Минти [1]:

8.12. *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset E^n$, $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset E^n$; *скалярное произведение* $(x_i - x_j,\ y_i - y_j) \geqslant 0$ *при всех* i, j; *кроме того, пусть* α *и* β *— неравные одновременно нулю вещественные числа. Тогда существует такое* $z \in E^n$, *что* $(x_i + \alpha z,\ y_i + \beta z) \geqslant 0$ *при всех* i. [23])*.*

Имеются и другие интересные результаты и задачи, в которых фигурирует сжатие в E^n. Рассматривая случай шаров одного радиуса, мы с помощью теоремы Киршбрауна заключаем, что если множество $X \subset E^n$ допускает сжатие в множество Y, то *радиус описанной сферы* у множества Y не больше, чем у множества X. Существуют такие X и Y в E^n, что X может быть сжато в Y, хотя Y имеет *бо́льшую ширину*; однако это невозможно, если X и Y — выпуклые тела и сжатие взаимно однозначно (Гейл [4]). По-видимому, ничего не известно относительно поведения в этом случае радиусов *вписанной* сферы.

Имеется нерешенная задача типа Хелли, касающаяся непрерывных сжатий в E^n. Для упорядоченных k-наборов точек $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ метрического пространства (M, ρ) *непрерывным сжатием* первого во второй называется такой упорядоченный k-набор $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ непрерывных отображений отрезка $[0, 1]$ в M, что при всех i и j имеем $\varphi_i(1) = x_i$, $\varphi_i(0) = y_i$ и $\rho(\varphi_i(\alpha), \ \varphi_j(\alpha)) \leqslant \rho(\varphi_i(\beta), \ \varphi_j(\beta))$, если только

$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. Задача состоит в оценке числа m_n, определенного как наименьшее j, такое, что для любых k-наборов $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ точек E^n, для которых каждый j-набор из x_i допускает непрерывное сжатие в соответствующий j-набор из y_i, всегда существует непрерывное сжатие всего k-набора $(x_1, \ldots, x_k)$ в k-набор $(y_1, \ldots, y_k)$. (Если такого j нет, то $m_n := \infty$). Легко видеть, что $m_1 = 2$. Кейфорд заметил, что из рассмотрения положительных и отрицательных единичных векторов, направленных по n координатным осям пространства E^n, и еще одной точки, далекой от всех точек этого множества, следует, что $m_n \geqslant 2n+1$ при $n \geqslant 2$.

Любопытна следующая задача Поульсена [1] и Кнезера [1]: Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — семейства единичных шаров в E^n, следует ли из $\mathscr{F} > \mathscr{G}$ то, что $\operatorname{vol} \mathfrak{u}\mathscr{F} \leqslant \operatorname{vol} \mathfrak{u}\mathscr{G}$ (где $\mathfrak{u}$ означает *объединение* множеств) и $\operatorname{vol} \pi\mathscr{F} \leqslant \operatorname{vol} \pi\mathscr{G}$. Положительное решение было бы полезно в связи с исследованиями Минковского о площади поверхности. Теорема Киршбрауна доставляет нам некоторую информацию и об этой задаче; Кнезер показал, что $\operatorname{vol} \mathfrak{u}\mathscr{G} \leqslant 3^n \operatorname{vol} \mathfrak{u}\mathscr{F}$. (О других деталях см. Кнезер [1] и Хадвигер [9].) Представляется очевидным, что в пространстве Минковского, отличном от евклидова пространства, ответ на поставленный вопрос будет отрицательным; в двумерном случае это следует из 8.11.

Для пространства Минковского X с единичным шаром C было бы интересно изучить число E'_C, определенное как наименьшее $\sigma > 0$, такое, что для любых семейств $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ гомотетов C с $\mathscr{F} > \mathscr{G}$ и $\pi\mathscr{F} \neq \varnothing$ при замене всех шаров семейства $\mathscr{G}$ концентричными шарами, раздутыми с коэффициентом подобия σ, мы придем к семейству шаров, имеющих общую точку, и число J'_C, определенное аналогичным образом для семейств транслятов C. Ясно, что $1 \leqslant J'_C \leqslant J_C$ и $1 \leqslant E'_C \leqslant E_C$, где J_C и E_C — постоянная Юнга и постоянная расширения из § 6. Возможно ли, что $1 < E'_C = E_C$? Каково E'_C, если C — тело Лейхтвейса (см. 6.5+)?

§ 9. Обобщенная выпуклость [1])

Применения и интуитивная идея выпуклости привели к широкому ряду понятий, которые все можно назвать «обобщенной выпуклостью». Для многих из них теоремы, связанные с теоремой Хелли, являлись либо причиной исследования, либо его побочным результатом; для других, видимо, не предпринимались попытки отыскания аналогов теоремы Хелли. Чтобы стимулировать такие попытки и облегчить сравнение с рассмотренными ранее понятиями, мы включаем в наше изложение некоторые обобщения выпуклости, которые сейчас представляются нам не связанными с теоремой Хелли.

Обычно для определения обобщенной выпуклости выделяют некоторое свойство выпуклых множеств в R^n или E^n, которое является либо характеристическим для выпуклых множеств, либо существенно в доказательстве какой-нибудь важной теоремы об этих множествах; затем обособленно формулируют это свойство или его подходящий вариант в других условиях. Для этой цели пригодны многие свойства выпуклых множеств. Мы сначала опишем в общем виде наиболее важные способы, которые применялись шире других, а затем кратко приведем некоторые из более частных результатов.

Обычное определение выпуклости в R^n может быть обобщено в соответствии со следующей схемой. В множестве X задано семейство $\mathcal{F}$ множеств вместе с функцией η, которая соотносит каждому $F \in \mathcal{F}$ семейство $\eta(F)$ подмножеств X. Множество $K \subset X$ называется η-*выпуклым*, если при любом $F \subset K$ и $F \in \mathcal{F}$ множество K содержит хотя бы одно из множеств семейства $\eta(F)$ [2]). Это наиболее распространенная форма обоб-

[1]) С материалом этого параграфа связана обширная литература (см., например, Блюменталь и Фриз [1], Валентин [11], Поляк и Полякова [1], Стами и Мар [1], Буземан и Шепард [1], Сётенс [1], Петерсон [1]).—*Прим. ред.*

[2]) Обычная выпуклость совпадает со специализацией этого определения, где $X = R^n$, F — семейство двухточечных множеств и $\eta(F)$ — (единственный) отрезок, для которого F — множество концов. — *Прим. ред.*

щения; она связана с большинством из обсуждаемых вариантов обобщенной выпуклости. При этом $\mathscr{F}$ — обычно семейство всех двухточечных подмножеств множества X; так, например, Пренович [1] изучает выпуклость в абстрактных геометриях, основывающуюся на понятии «соединения» (двух точек). Относительно других возможностей см. 9.7 и Валентин [4], где рассматривается один вариант такого определения и есть ссылки на иные варианты.

Другой подход вытекает из того факта, что каждое выпуклое множество в R^n есть пересечение полупространств (Моцкин [1], Хаммер [1], [2], Кли [4]) и каждое замкнутое (соответственно открытое) выпуклое множество есть пересечение замкнутых (соответственно открытых) полупространств. Пусть дано семейство $\mathscr{H}$ подмножеств множества X; множество $K \subset X$ называется *$\mathscr{H}$-выпуклым,* если K есть пересечение множеств, образующих некоторое подсемейство семейства $\mathscr{H}$. (Относительно примеров подобного рода см. 9.1, 9.3, 9.9, а также Гика [3] и Гейер и Рей [1].) Определение $\mathscr{H}$-выпуклости может быть сформулировано и в терминах отделимости: множество $K \subset X$ является $\mathscr{H}$-выпуклым, если для всякого $x \in X \setminus K$ существует такое $H \in \mathscr{H}$, что $K \subset H$ и $x \notin H$. (Относительно обобщений, следующих этой идее, см. Эллис [1].) Само семейство $\mathscr{H}$ может определяться через семейство функций; точнее говоря, если нам задано семейство Φ вещественных функций на X, мы говорим, что множество $K \subset X$ является *Φ-выпуклым,* если для каждого $x \in X \setminus K$ существует такая функция $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) < \inf \varphi K$. Этим путем шел Фан [1] при обобщении общеизвестной теоремы Крейна — Мильмана[1]; этот подход участвует также в различных понятиях «регулярной выпуклости» (см. Берж [1] и приведенную там литературу).

Другой подход основан на том, что подмножество R^n выпукло тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой связно. Оставаясь в рамках R^2 и используя вместо прямых двупараметрическое се-

[1]) См. Крейн и Мильман [1]. — *Прим. ред.*

мейство кривых, Дрендел [1] получает интересные результаты при весьма слабых предположениях. В его работе приведена более ранняя литература по результатам этого рода. (См. Скорняков [1] относительно соответствующих результатов о семействах кривых в. R^2, Валентин [3], Кун [1], Фари [1], Кошинский [1] и приводимую ими литературу о характеризации выпуклости в терминах k-мерных сечений.)

Естественно, можно разными способами обобщать алгебраическую структуру, лежащую в основе пространства, в котором определяется выпуклость. Многие из комбинаторных результатов этой работы остаются в силе для линейного пространства над произвольным упорядоченным полем. Монна [1] исследует выпуклость в пространствах над неархимедовскими упорядоченными полями. Другие алгебраические варианты принадлежат Радо [2] и Гика [1], [2]; первый из них кратко описан в 9.4.

Можно, не задаваясь окружающим линейным пространством, вводить непосредственно понятие *барицентрического исчисления* или *выпуклого пространства*. Это делали Стоун [1], [2], Кнезер [1], Неф [1]. Их теории можно преобразовать так, что эти пространства будут погружаемы в линейные, но они могут представлять и самостоятельный интерес, если из свойств пространств выводить их топологическую или алгебраическую структуру.

Для открытого подмножества D метрического пространства (M, ρ) мы будем обозначать через δ_D и ν_D соответственно внешнюю и внутреннюю метрики, определяемые множеством D, т. е. функции, заданные на D и соответственно на $M \setminus D$ равенствами $\delta_D(x) := \rho(\{x\}, M \setminus D)$ и $\nu_D(x) := \rho(\{x\}, D)$. Если $M = E^n$ и ρ — евклидово расстояние, то выпуклость множества D эквивалентна выпуклости функции $(-\ln \delta_D)$, а также выпуклости функции ν_D. Это наводит на мысль о задании семейства Φ функций, определенных на подмножествах метрического пространства (M, ρ), после чего можно условиться говорить, что открытое множество $K \subset M$ является *Φ-выпуклым*, если $-\ln \delta_K \in \Phi$ или, по-другому, если $\nu_K \in \Phi$. На

этом пути можно подойти к понятию выпуклости в пространствах нескольких комплексных переменных (см. 9.11). Однако имеющаяся здесь более полезная идея заключается в том, чтобы обобщать своего рода «выпуклую структуру», образованную выпуклыми подмножествами в R^n *вместе* с определенными на них выпуклыми или вогнутыми функциями. Это приводит, с одной стороны, к учению о комплексной выпуклости (9.11), а с другой — к абстрактному принципу минимума Бауера [1], обобщающему теорему Крейна — Мильмана.

Заметим, наконец, что каждая новая характеризация выпуклости в R^n может вести к новым обобщениям выпуклости, и, обратно, поиски подходящего обобщения понятия выпуклости, применимого в других условиях, могут привести к открытию новых полезных свойств множеств, выпуклых в классическом смысле. Интересный пример такого рода может дать работа Родстрёма ([1], [2] и 9.10) о топологических группах.

Перейдем к разбору некоторых специфических «выпуклостей», начиная с тех, которые оказываются наиболее тесно связанными с теоремой Хелли.

9.1. Сферическая выпуклость. Выпуклость на n-мерной сфере S^n определялась по-разному; она, бесспорно, является наиболее существенной из всех обобщений понятия выпуклости в своем отношении к теореме Хелли. Изучено несколько определений сферической выпуклости, правда не всегда с должной оглядкой на налагаемые ограничения. Для простоты будем рассматривать только замкнутые множества, хотя в большинстве случаев это ограничение можно опустить.

(S). Множество $K \subset S^n$ *строго выпукло* тогда и только тогда, когда оно не содержит диаметрально противоположных точек сферы и вместе с каждой парой точек содержит малую дугу определяемого ими большого круга. Этому эквивалентно условие: (замкнутое) множество K не содержит диаметрально противо-

положных точек и является пересечением замкнутых полусфер. Каждое строго выпуклое множество K является пересечением открытых полусфер и обратно.

(W). Множество $K \subset S^n$ *слабо выпукло* тогда и только тогда, когда оно вместе с каждой парой точек содержит соединяющую их малую дугу большой окружности или — если рассматриваемые точки являются диаметрально противоположными — хотя бы одну полуокружность большого круга с концами в этих точках. Сформулированное условие эквивалентно требованию о том, что K связно и является пересечением замкнутых полусфер.

(R). Множество $K \subset S^n$ является *выпуклым в смысле Робинсона* тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой непротивоположных точек оно содержит соединяющую эти точки малую дугу определяемого ими большого круга. Этому эквивалентно условие о том, что K является пересечением замкнутых полусфер.

(H). Множество $K \subset S^n$ является *выпуклым в смысле Хорна* тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой непротивоположных точек оно содержит по крайней мере одну из определяемых этими точками дуг большого круга.

Очевидно, каждое строго выпуклое множество является слабо выпуклым; слабая выпуклость влечет за собой выпуклость в смысле Робинсона; выпуклость в смысле Робинсона влечет за собой выпуклость в смысле Хорна. Семейство строго выпуклых множеств и семейство множеств, выпуклых в смысле Робинсона, содержат пересечения (см. выше, стр. 51). Все строго выпуклые множества являются стягиваемыми, так же как все слабо выпуклые множества и множества, выпуклые в смысле Робинсона, за исключением больших m-сфер $S^m \subset S^n$. В различных случаях может быть использовано одно или другое из указанных определений сферической выпуклости. Последнее определение было введено Хорном [1] при доказательстве его обобщения теоремы Хелли. Ро-

бинсон [2] использовал свое определение при изучении индексов конгруентности сферических шапок (см. также Блюменталь [2]). Слабо выпуклые множества рассматривал Сантало [4], хотя определение, данное в начале его работы, несколько отличается от приведенного и включает только подкласс строго выпуклых множеств.

Исчерпывающая библиография работ, связанных со сферической выпуклостью, была бы очень обширной. Почти каждое понятие и результат, связанные с выпуклостью в R^n, можно распространять на S^n и во многих случаях это хотя бы частично было осуществлено, чаще всего в связи с затруднениями, возникающими при решении не связанных с выпуклостью задач. В качестве примера укажем здесь на малоизвестную заметку Выгодского [1], в которой доказывается для S^2 один аналог теоремы Каратеодори. (Основная теорема М. Я. Выгодского была ранее доказана Фенхелем [2][1].) Кажется, теорема Каратеодори и ее варианты не были в полном объеме обобщены на сферический случай, хотя такое распространение наверняка возможно.

Для некоторых задач случай пространства S^n является более содержательным, чем случай пространства R^n, в связи с имеющим место в S^n принципом двойственности. Например, в случае S^n для аналогов теоремы Юнга [1] об описанных сферах и теоремы Штейнхагена [1] о вписанных сферах существуют двойственные им теоремы (Сантало [5])[2]. С другой стороны, некоторые верные в S^n теоремы не имеют евклидовых аналогов. Примером является различие между следующими двумя теоремами, родственными теореме Юнга (здесь основную роль играет связность, что не существенно в R^n). Если в S^n компактное подмножество имеет диаметр, меньший чем $\arccos(n+1)^{-1}$, то оно принадлежит замкнутой

[1]) Эта теорема была известна и ранее; относящаяся к ней библиография весьма обширна. Мы ограничимся указанием на более позднюю работу Крейн [1]. — *Прим. ред.*

[2]) Хадвигер и Дебруннер [3] приводят изящный «двойственный аналог» и для теоремы Юнга в E^2. — *Прим. ред.*

полусфере; компактное же подмножество диаметра $\arccos(n+1)^{-1}$ может не принадлежать одной полусфере (Мольнар [4]). Если в S^n компактное *связное* подмножество имеет диаметр $\leqslant \arccos n^{-1}$, то оно принадлежит замкнутой полусфере (Грюнбаум [14]).

Благодаря тесной и очевидной связи между выпуклостью в S^n и выпуклыми конусами в R^{n+1}, многие результаты могут быть интерпретированы и в сферическом и в евклидовом пространстве. Это неоднократно использовалось (см., например, Моцкин [1], Робинсон [1], Хорн [1]).

Для сферических аналогов теоремы Хелли наиболее простым представляется подход, связанный с топологической теоремой Хелли. Из нее следует, что семейство всех гомологических клеток в S^n имеет порядок Хелли $n+2$. Иначе результат можно сформулировать так: семейство $\mathcal{F}$ гомологических клеток в S^n имеет непустое пересечение тогда и только тогда, когда каждое объединение $n+2$ множеств $\mathcal{F}$ отлично от S^n, а каждое пересечение $n+1$ или менее множеств из $\mathcal{F}$ является гомологическим шаром. Это приложимо, в частности, к случаю строго выпуклых множеств, рассмотренных Мольнаром [4] [24]). Подобные следствия могут быть получены и для других типов сферической выпуклости, но их формулировки несколько сложнее ввиду отсутствия *инвариантности при пересечении*, или отсутствия *стягиваемости*, или отсутствия обоих этих свойств (см. Хорн [1], Карлин и Шепли [1], Грюнбаум [14]).

Другие результаты типа теоремы Хелли для S^n легко получить из результатов о выпуклых множествах в R^n. Например, случай $j=1$ теоремы 4.1 (в основном содержащийся в результате Штейница 3.2) может быть сформулирован как следующий факт, впервые установленный Робинсоном [2]:

Если $\mathcal{F}$ — семейство из не менее чем $2n+2$ выпуклых в смысле Робинсона множеств в S^n и каждые $2n+2$ множества из $\mathcal{F}$ имеют общую точку, то $\pi\mathcal{F} \neq \varnothing$.

Этот и близкие к нему результаты были использованы Блюменталем [2] в связи с линейными неравенствами. Относительно некоторых теорем о пересечении и покрытии, в которых участвуют полусферы, см. Хадвигер [4] и Блюменталь [2], [4]; на вопрос, поставленный Хадвигером, дал ответ Грюнбаум [9].

Выпуклые в смысле Хорна множества изучались Хорном [1] и Винченцини [3], [4], [5]. Хорн показал, что если $1 \leqslant k \leqslant n+1$ и $\mathscr{F}$ — семейство из не менее чем k выпуклых в смысле Хорна множеств в S^n, таких, что каждые k множеств из $\mathscr{F}$ имеют общую точку, то каждая большая $(n-k)$-сфера в S^n принадлежит большой $(n-k+1)$-сфере, пересекающей каждое множество из $\mathscr{F}$ (ср. 4.3). При $k=n+1$ это обеспечивает существование такой точки z, что каждое множество из $\mathscr{F}$ содержит или точку z, или диаметрально противоположную ей.

9.2. Проективная выпуклость. Множество K в n-мерном (вещественном) проективном пространстве P^n называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой своих точек оно содержит ровно один из двух сегментов, определяемых этими точками. Такие множества после введения их Штейницем [1] и Вебленом и Юнгом [1], рассматривались неоднократно, хотя большинство авторов ограничивались установлением эквивалентности разных определений. (См. де Гроот и де Фриз [1] и перечисляемые ими работы.) Проективно выпуклые множества стягиваемы, но не образуют семейство, содержащее пересечения. Пересечение $k+1$ выпуклых множеств в P^n может иметь до $\sum_{i=1}^{n} C_k^i$ компонент, каждая из которых проективно выпукла (Моцкин [1]). С другой стороны, если каждые два множества имеют выпуклое пересечение, то выпуклое пересечение имеет и все семейство множеств. Таким образом, следующее утверждение является прямым следствием топологической теоремы Хелли:

Если семейство $\mathscr{F}$ *из не менее чем* $n+1$ *замкнутых выпуклых множеств в* P^n *таково, что каждые два множества из* $\mathscr{F}$ *имеют выпуклое пересечение и каждые* $n+1$ *множеств имеют непустое пересечение, то* $\pi\mathscr{F} \neq \varnothing$ (Грюнбаум [11]).

При $k \geqslant 1$ обозначим через $\mathscr{V}(n, k)$ класс всех подмножеств P^n, являющихся объединениями k или менее попарно непересекающихся замкнутых выпуклых множеств. Представляется правдоподобным, что $\mathscr{V}(n, k)$ имеет конечный порядок Хелли, но, по-видимому, это не установлено, и заведомо неизвестно точное значение даже величины $\alpha^0(\mathscr{V}(n, 2))$ (ср. 4.11). Относительно других результатов, связанных с проективной выпуклостью и касающихся общих трансверсалей, см. Фенхель [3], Кёйпер [1], де Гроот и де Фриз [1], Швеппе [1], Геддам [1], Маршо [1], [2], Грюнбаум [1], Хэр и Геддам [1] и Синден [1].

9.3. Выпуклость в смысле Леви. Так же как и выпуклость в смысле Радо 9.4, это понятие возникло в связи с теоремой Хелли. Леви [1] рассматривает семейство $\mathscr{C}$ подмножеств множества X и прежде всего предполагает, что

(I) $\pi\mathscr{G} \in \mathscr{C}$ *при любых* $\mathscr{G} \subset \mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$*-оболочка* каждого множества Y, принадлежащего некоторому множеству из семейства $\mathscr{C}$, определяется как пересечение *всех* множеств из $\mathscr{C}$, содержащих Y. Вторая аксиома Леви такова:

(II_n) *Каждое* $(n+2)$*-точечное подмножество любого множества семейства* $\mathscr{C}$ *содержит два непересекающихся множества,* $\mathscr{C}$*-оболочки которых имеют общую точку.*

Обобщая доказательство Радона [2], Леви выводит из указанных выше аксиом, что если $\mathscr{F}$ — конечное семейство из не менее чем $n+1$ множеств, $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}$, и каждые $n+1$ множеств семейства $\mathscr{F}$ имеют общую точку, то $\pi\mathscr{F} \neq \varnothing$. В качестве следствий он получает теорему Хелли о выпуклых множествах в R^n, ее обобщение на n-мерные геометрии,

удовлетворяющие гильбертовым аксиомам инцидентности и порядка (Гильберт [1]), и теорему о пересечениях в свободных абелевых группах с n образующими. (В последнем случае $\mathscr{C}$ является семейством всех подгрупп, причем из каждой подгруппы исключен нейтральный элемент.)

Было бы интересно в системе, удовлетворяющей аксиоме (I) и быть может другим простым «аксиомам выпуклости», изучить внутренние связи свойства Радона, выраженного аксиомой (II_n), свойства Хелли, сформулированного выше, и свойства Каратеодори, выраженного следующим образом:

(III_n) *Если произвольная точка p принадлежит $\mathscr{C}$-оболочке множества Y, то p принадлежит $\mathscr{C}$-оболочке некоторого не более чем $(n+1)$-точечного подмножества Y.*

9.4. Выпуклость в смысле Радо. Радо [2] рассматривает абелеву группу A, в которой действует коммутативное кольцо $\mathscr{R}$ операторов, и налагает на A и $\mathscr{R}$ некоторые условия, которые обеспечивают применимость теоремы Хелли (с соответствующей интерпретацией «выпуклого множества»). Его рассуждение охватывает не только теорему Хелли о выпуклых множествах в R^n, но и обобщение теоремы Стильтьеса [1] об арифметических прогрессиях. По отношению к заданной в R^n координатной системе *решеткой* является множество всех точек вида $x_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$, где x_i — заданные $n+1$ точек с целыми координатами, а α_i — произвольные целые числа. Радо доказал, что если $\mathscr{F}$ — конечное семейство из не менее чем $n+1$ решеток в R^n, каждые $n+1$ из которых имеют общую точку, то $\pi\mathscr{F}\neq\varnothing$.

9.5. Гипервыпуклость. Пусть K — компактное выпуклое множество в R^n. Множество $A\subset R^n$ мы назовем *K-выпуклым* (или *гипервыпуклым относительно K*), если A вместе с каждой парой своих точек содержит пересечение всех транслятов множества K, содержащих эти точки. Семейство K-выпуклых мно-

жеств содержит пересечения, а связные K-выпуклые множества суть пересечения транслятов множества K. K-выпуклые множества могут не быть связными, но обычно рассматривают их отдельные связные компоненты. Изучение гипервыпуклости было начато Майером [1]; полную библиографию относящихся сюда работ можно найти у Паскуалини [1], Блана [1] и Сантало [6]. В большинстве работ рассматривается только случай R^2 и на K накладываются некоторые ограничения. Речь идет об опорных свойствах, эквивалентных определениях, гипервыпуклых оболочках, экстремальных задачах и т. п.

9.6. Квазивыпуклость. Пусть Λ — подмножество отрезка $[0, 1]$. Множество $K \subset R^n$ называется *Λ-выпуклым* (или *квазивыпуклым относительно* Λ), если $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$, каковы бы ни были $\lambda \in \Lambda$ и $x, y \in K$. Это понятие изучалось Грином и Гастином [1], которые указывают также литературу, касающуюся рассмотренных до них частных случаев (например, $\Lambda = \left\{\frac{1}{2}\right\}$). Подробное изучение более общих понятий проведено Моцкином [4].

9.7. Трехточечная выпуклость. Множество K в R^n называется *трехточечно выпуклым*, если вместе с каждыми тремя своими точками оно содержит хотя бы один из трех отрезков, определяемых этими точками. Валентин [4], [5][1]) провел интересное исследование этого свойства, а более общее понятие указал Аллен [1]. Хэр и Геддам [1] обнаружили связь между трехточечной выпуклостью и проективной выпуклостью. Представляется вероятным, что семейство всех трехточечно выпуклых подмножеств в R^n имеет конечный порядок Хелли, но это еще не установлено. (См. Валентин [6], [7] и Гюи и Кей [1].)

9.8. Упорядоченная выпуклость. Множество K в частично упорядоченном пространстве называется *упорядоченно-выпуклым*, если при любых $x, z \in K$ и

---

[1]) См. также книгу Валентин [10]. — *Прим. ред.*

$x \prec y \prec z$ также и $y \in K$. Относительно экстремальных точек и выпуклых оболочек в применении к упорядоченной выпуклости см. Франклин [1]. По-видимому, в литературе отсутствуют родственные теореме Хелли результаты для упорядоченной выпуклости в произвольных частично упорядоченных линейных пространствах, хотя в любом *линейно* упорядоченном пространстве семейство всех упорядоченно-выпуклых множеств является содержащим пересечения и имеет число Хелли равное 2.

9.9. Метрическая выпуклость. Обычное определение метрической выпуклости принадлежит Менгеру [1]: множество K в метрическом пространстве (M, ρ) называется *метрически выпуклым,* если для каждой пары различных точек $x, z \in K$ существует такая точка $y \in K$, отличная от x и z, что $\rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Если K не только выпукло, но еще и метрически полно, то точки x и z должны принадлежать подмножеству K, изометричному отрезку длины $\rho(x, z)$. Замкнутое подмножество в E^n (или в любом строго выпуклом пространстве Банаха) метрически выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло в обычном смысле. Относительно метрики на сфере S^n, задаваемой геодезическим расстоянием между двумя точками, замкнутое множество метрически выпукло тогда и только тогда, когда оно слабо выпукло в смысле 9.1.

Относительно различных геометрических рассмотрений, использующих понятие метрической выпуклости и другие, тесно с ним связанные, см. Блюменталь [3], Буземан [2], Пок [1], Ароншайн и Паничпакди [1] и литературу, указываемую этими авторами. Теорема Уайтхеда [1] утверждает, что для каждой точки p риманова многообразия с положительно определенной метрикой всякая достаточно малая «сферическая» окрестность точки p метрически выпукла в несколько более строгом смысле. Этот результат был усилен Нейенхейсом [1].

Различные авторы изучали зависимость между топологической структурой метризуемого простран-

ства и существованием выпуклой метрики, совместной с данной топологией. Менгер [1] поставил вопрос: допускает ли каждая непрерывная кривая выпуклую метризацию; эта задача после некоторых частичных результатов была окончательно решена в положительном смысле Бингом [1]. По поводу этого и близких результатов см. Бинг [1], [2], [3], Планкетт [1], Лелек и Нитка [1] и упоминаемую ими литературу.

Чтобы обобщить некоторые свои теоремы отделимости, Михаэль [1] сформулировал понятие *выпуклой структуры* на метрическом пространстве, описывая ситуацию, в которой, как в римановом многообразии, имеет смысл образование «выпуклых комбинаций» некоторых (но не обязательно всех) k-наборов точек пространства. Относительно другого метрического понятия, связанного с выпуклостью, см. Михаэль [2].

Данцер [2], [3], [4] применяет еще другую концепцию выпуклости в метрических пространствах. Для каждой пары различных точек x, $z \in M$ положим $H(x, z) = \{y \in M : \rho(x, y) < \rho(y, z)\}$. Такое множество называется *полупространством*, и множество называется *выпуклым* тогда и только тогда, когда оно является пересечением полупространств. Это тесно связано с идеей Лейбница (см. Буземан [1]) определения плоскости как множества всех точек, равноудаленных от двух данных. Из результатов Буземана [1] следует, что если (M, ρ) — нормированное линейное пространство с метрикой, порожденной нормой, то все замкнутые выпуклые в смысле Данцера множества этого пространства являются метрически выпуклыми (в смысле Менгера) только тогда, когда (M, ρ) есть евклидово пространство. Множества вида $\{y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, z)\}$ изучались также Калишем и Страусом [1].

Определяя выпуклую оболочку множества как пересечение всех содержащих его полупространств, Данцер [3] доказывает, что в метрическом пространстве *каждое семейство шаров, имеющих непустое пересечение, покрывает выпуклую оболочку множества их центров*. Это служит основным инструментом

в его доказательстве приведенной выше теоремы 7.12.

9.10. Выпуклость в топологических группах. Хотя у Гика [4], [5] можно найти другой подход к выпуклости в топологических группах, мы ограничимся здесь лишь идеями Родстрёма [1], [2]. Пусть G — топологическая группа и 2^G — класс всех непустых подмножеств G. *Однопараметрическая полугруппа подмножеств группы* G определена Родстрёмом [2] как такое взаимно однозначное отображение A интервала $(0, \infty)$ в 2^G, что $A(\delta_1+\delta_2)=A(\delta_1)+A(\delta_2)$ для всех $\delta_i \in (0, \infty)$, где знак «+» в правой части обозначает обычное сложение множеств. Родстрём [2] доказывает следующее утверждение, подсказанное тем наблюдением, что в E^n «высокие степени малых множеств в некотором смысле почти выпуклы»:

В локально выпуклом хаусдорфовом линейном пространстве однопараметрические полугруппы компактных множеств совпадают с имеющими вид $A(\delta)=f(\delta)+\delta K$, *где* f — *однопараметрическая полугруппа точек, а* K — *компактное выпуклое множество.*

В более ранней работе Родстрёма [1] небольшая разница в определении однопараметрической полугруппы ведет к заключению о том, что в R^n однопараметрические полугруппы множеств совпадают с полугруппами вида $A(\delta)=\delta K$ при компактном выпуклом K. Это наводит на мысль, что в произвольной топологической группе G можно определять выпуклые множества в терминах однопараметрических полугрупп, или по крайней мере, что эти полугруппы могут играть роль, подобную роли выпуклых множеств в R^n. Родстрём [1] показывает, что, если G — группа Ли, то каждая однопараметрическая полугруппа подмножеств G имеет в некотором смысле инфинитезимальную образующую, которая является выпуклым множеством.

9.11. Комплексная выпуклость. Перейдем, наконец, к обобщенной выпуклости, которая играет очень важную роль в теории функций нескольких комплексных

переменных. Здесь обобщаются одновременно понятия выпуклого множества и выпуклой функции с поразительным параллелизмом между вещественной и комплексной теориями. (Конечно, они различаются в деталях доказательств, так как комплексная теория в некоторых отношениях много труднее.) См. у Бремермана [1], [2], [3] прекрасное описание этого параллелизма и ссылки на другие работы в этой области. В частности, Бремерман [1] приводит «вещественно-комплексный словарь» со следующим переводом терминов:

Вещественные

линейная функция одной вещественной переменной,
выпуклая функция одной вещественной переменной,
выпуклая функция n вещественных переменных,
выпуклая область в R^n.

Комплексные

гармоническая функция одной комплексной переменной,
субгармоническая функция одной комплексной переменной,
плюрисубгармоническая функция n комплексных переменных,
область голоморфности в C^n (пространство n комплексных переменных).

Вещественнозначная функция V в области $D \subset C^n$ является *плюрисубгармонической*, если $-\infty \leqslant V < \infty$, V полунепрерывна сверху в D, для каждой аналитической плоскости $P(z, a) = \{z + \lambda a : \lambda \in C^1\}$ (где $z, a \in C^n$) она является субгармонической функцией от λ на множестве $D \cap P(z, a)$. Комплекснозначная функция в области $D \subset C^n$ является *голоморфной*, если она однозначна и голоморфна в отдельности по каждой из n комплексных переменных. Область D

является *областью голоморфности*, если существует функция, голоморфная в D и не продолжаемая голоморфно на более широкую область. Бремерман [1] оправдывает данный выше «перевод» убедительным перечнем параллельных определений и теорем; вот некоторые из них:

выпуклая [плюрисубгармоническая] функция достигает своего максимума только на границе области; в противном случае она постоянна в области;

область $D \subset R^n [D \subset C^n]$ выпукла [является областью голоморфности] тогда и только тогда, когда $(-\ln \delta_D)$ выпуклая [плюрисубгармоническая] функция в D. (Здесь δ_D — расстояние изнутри D до границы D, так что $\delta_D(p)$ есть верхняя грань радиусов евклидовых сфер с центром p, содержащихся в D.)

Как можно догадаться из приведенного выше параллелизма, плюрисубгармонические функции и области голоморфности называются также *псевдовыпуклыми функциями* и *псевдовыпуклыми областями.* (Псевдовыпуклые области первоначально определялись по-другому; это определение оказалось эквивалентным определению области голоморфности.) Было бы очень интересно описать аксиоматически структуру, состоящую из определенных множеств и заданных на них функций, таким образом, чтобы теория вещественной и теория комплексной выпуклости объединялись одной более общей теорией. По поводу идей, которые могли бы при этом быть полезны, см. Бауер [1], [2], [3] и некоторые работы, на которые он ссылается.

ПРИМЕЧАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ

[1] Относительно других результатов, связанных с теоремой Штейница, см. Поляк и Полякова [1], Бонис и Кли [1], Бонис и Рей [1], [2] и Ивз [1].

[2] Короткое доказательство теоремы 3.3 дал Рей [2]; уточненная форма этого результата приведена в работе Бонис и Рей [2].

[3] По поводу связи теоремы 3.5 и теоремы Хана — Банаха из функционального анализа см. Родстрём [3].

[4] Относительно обобщений утверждений 3.5 и 3.6, а также различных других результатов, связанных с теоремой Каратеодори, см. Рей [1].

[5] Эта теорема утверждает, что если X есть $(n+2)$-точечное множество пространства R^n, то X является объединением двух непересекающихся множеств X_1 и X_2, выпуклые оболочки которых пересекаются. Как заметил Проскуряков [1], множества X_1 и X_2 определены единственным образом тогда и только тогда, когда множество X не вырождено в аффинном смысле (т. е. когда никакие $n+1$ точек из X не принадлежат одной $(n-1)$-мерной плоскости). Относительно применения этого факта к фазовому анализу многокомпонентных систем см. Бек [1] и Пеппер [1]. По поводу критерия, позволяющего судить, принадлежат ли две данные точки из X одному и тому же подмножеству X_1, см. Космак [1] и Кенелли [1]. Обобщение теоремы Радона содержится в работе Экхоф [1].

[6] Развитие идей, лежащих в основе теоремы Радона, привело к важным понятиям «изображения Гейла» и «диаграммы Гейла» конечных множеств в R^n. Они были введены М. Перлисом и использовались им для получения многих новых результатов о выпуклых многогранниках. Из теорем, полученных Перлисом, мы отметим здесь только следующую:

3.11. *Существует такой выпуклый восьмимерный многогранник P с 12 вершинами, что ни у одного многогранника, комбинаторно эквивалентного P, все вершины не совпадают с рациональными точками пространства E^8.*

Полное изложение работы Перлиса об изображениях и диаграммах Гейла имеется в книге Грюнбаум [22]. Относительно дополнительных результатов см. Мак-Маллин и Шепард [1].

[7] По поводу другого доказательства и обобщений 4.11 см. Дугунди [1].

[8] В самом деле, представляется трудным даже определение всех типов пересечений, которые реализуются в R^n параллелотопами с ребрами, параллельными осям координат. Некоторые частные результаты в этом направлении были получены Робертсом [1].

[9] Однако наиболее эффективная процедура для этого — это, видимо, та, которую указали Фалкерсон и Гросс [1], [2]. Интересной нерешенной до сих пор задачей является вопрос определения всех типов пересечения, которые реализуются семействами дуг окружности, триода (т. е. одномерного континуума, гомеоморфного букве Т. — *Перев.*) или другого простого одномерного континуума.

[10] В случае когда $\mathfrak{D}$ — свойство семейства множеств быть разложимым в k подсемейств (с фиксированным $k \geqslant 1$), каждое из которых имеет непустое пересечение, и когда $\mathscr{E}$ — семейство всех параллелотопов в R^n, ребра которых параллельны осям координат, число Хелли $\alpha_\infty(\mathscr{E})$ определено Данцером и Грюнбаумом [2].

[11] Робкин и Валентин [1] доказали следующую теорему типа Хелли, относящуюся к параллельным трансверсалям:

5.15. *Для компактных выпуклых множеств K в R^2 эквивалентны следующие два утверждения:*

a⁰. *K — одноточечное множество, сегмент, треугольник или параллелограмм;*

b⁰. *Если C — замкнутое связное множество из R^2/K и любые три точки K могут быть покрыты параллельными прямыми, пересекающими K, то само множество C может быть покрыто семейством параллельных прямых, пересекающих K.*

По поводу результатов другого рода, касающихся трансверсалей семейств множеств, см. Л. Келли [2] и указанную там литературу.

[12] Содержащиеся в работе Волков [1] рассуждения применимы лишь к не более чем $(n+1)$-точечным множествам, однако в работе Волков [2] тот же результат при помощи стандартного применения теоремы Хелли переносится на произвольные множества.

[13] Относительно одной задачи, в которой слова «трансляты» заменены на «образы при движениях», см. Бройш и Ньюмен [1]. (Ср. также Шклярский, Ченцов и Яглом [1], задачи 48—50. — *Ред.*)

[14] Некоторые результаты в этом направлении получил Вегнер [1].

[15] По поводу дополнительных интересных результатов, касающихся чисел $\gamma_2(T^nC)$ и $\gamma_2(H^nC)$, см. Чакерян и Штейн [1], [2], где, в частности, доказано, что $\gamma_2(TC)=\gamma_2(HC)=3$, если C — треугольник, и что $\gamma_2(TC)\leqslant n^n$ для n-мерных тел C, где $n\geqslant 1$, а также Чакерян и Салли [1] и Качарова-Каранова [1], где доказано, что $\gamma_2(TB^3)=4$ (ср. ниже 7.7).

[16] Относительно родственных результатов см. Конвей и Крофт [1].

[17] По поводу родственных результатов см. также Бамба, Роджерс и Цассенхауз [1].

[18] Задачу, в известном смысле обратную определению числа $[rB^n/B^n]$, решает Флориан [1], который ищет наибольший шар, такой, что его можно покрыть четырьмя шарами заданного радиуса (т. е. определяет по числу $[rB^n/B^n]$ величину r).

[19] Родственные результаты и задачи рассматривались Крофтом [1], Шютте [1] и Грюнбаумом [23].

[20] По поводу полного определения чисел B_k^n, а также смежных результатов и задач см. Грюнбаум [22], гл. 18. Свойства семейств сфер, связанные с 8.4, были рассмотрены Анусиаком [1], а соотношения между независимыми семействами и нервами — Веглорцем [1]. Другие интересные задачи из этой обширной области исследовались Хендерсоном [1].

[21] По поводу упрощенного доказательства и небольшого обобщения теоремы Грёча см. Грюнбаум [24].

[22] Дополнительные результаты и обобщения были получены Шёнбеком [1], [2].

[23] О далеко идущих обобщениях и аналитических применениях теоремы 8.12 см. Дебруннер и Флор [1], Минти [2], Браудер [1] и Фан [2]. Последняя из этих работ содержит также некоторые теоремы типа теоремы Хелли.

[24] Дополнительные результаты типа Хелли для строго выпуклых множеств были получены Бекером [1], [2].

БИБЛИОГРАФИЯ[1])

Абе, Кубота, Ионегути (Abe Y., Kubota T., Yoneguchi H.)

1. Some properties of a set of points in Euclidean space, Kodai Math. Sem. Rep., 1950, 117—119.

Александров П. С.

1*. Комбинаторная топология, М.-Л., Гостехиздат, 1947.

Александров П. С. и Хопф (Alexandroff P., Hopf H.)

1. Topologie, 1, Berlin, 1935.

Аллен (Allen J. E.)

1. A generalization of convexity, Abstract 582-29, *Not. Amer. Math. Soc.*, 8 (1961), 344.

Ароншайн и Паничпакди (Aronszajn N., Panitchpakdi P.)

1. Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 405—439.

Асплунд и Грюнбаум (Asplund E., Grünbaum B.)

1. On a coloring problem, *Math. Scand.*, **8** (1960), 181—188.

Банах (Banach S.)

1. Theory of functions of real variables, Warsaw, 1951.

Бант (Bunt L. H. N.)

1. Bijdrage tot de Theorie der convexe Puntverzamelingen, Диссертация, Univ. of Groningen, Amsterdam, 1934.

Бауер (Bauer H.)

1. Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte. I; II. *Arch. Math.*, **9** (1958), 389—393; **11** (1960), 200—205.
2. Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **11** (1961), 89—136.
3. Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 1—59.

Безикович (Besicovitch A. S.)

1. On Crum's problem, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 285—287.

---

[1]) По поводу помеченных звездочкой номеров см. Предисловие. — *Прим. ред.*

2. On semicircles inscribed into sets of constant width. В книге Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 15—18.

Бейджемил (Bagemihl F.)
1. A conjecture concerning neighboring tetrahedra, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 328—329.

Белецкий (Bielecki A.)
1. Problem 56, *Colloq. Math.*, **1** (1948), 333—334.

Бенсон (Benson R. V.)
1. Enclidean geometry and convexity, N. Y., 1966.

Бердышев В. И.
1*. Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей, *Мат. заметки*, **3** (1968), 327—338.

Беренд (Behrend F.)
1. Über einige Affininvarianten konvexer Bereiche, *Math. Ann.*, **113** (1936), 713—714.
2. Über die kleinste umbeschriebene und die grösste einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs, *Math. Ann.*, **115** (1938), 379—411.

Берж (Berge C.)
1. Sur une convexité régulière non linéaire et ses applications à la théorie des jeux, *Bull. Soc. Math. France*, **82** (1954), 301—315.
2. Sur une propriété combinatoire des ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 2698—2699.

Берч (Birch B. J.)
1. On 3N points in a plane, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **55** (1959), 289—293.

Берштейн (Berstein J.)
1. A generalization of Helly's theorem (в печати).

Бестон (Baston V. J. D.)
1. Intersections of polyhedra in Euclidean spaces, Диссертация, Univ. of London, 1961.
2*. Some properties of polyhedra in euclidean space, Oxford, 1965.

Бенцер (Benzer S.)
1. On the topology of genetic fine structure, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959), 1607—1620.
2. The fine structure of the gene, *Scientific Am.*, **206, № 1** (1962), 70—84.

Бинг (Bing R. H.)
1. Partitioning a set, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 1101—1109.
2. Partitioning continuous curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 536—556.
3. A convex metric with unique segments, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 167—174.

Б л а н (B l a n c E.)

1. Les ensembles sur convexes planes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **60** (1943), 215—246.

Б л ю м е н т а л ь (B l u m e n t h a l L. M.)

1. Some imbedding theorems and characterization problems of distance geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 321—338.
2. Metric methods in linear inequalities, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 955—966.
3. Theory and applications of distance geometry, Oxford, 1953.
4. Global subsets of the sphere, *Arch. Math.*, **7** (1956), 367—373.

Б л ю м е н т а л ь и В а л и н (B l u m e n t h a l L. M., W a h l i n G. E.)

1. On the spherical surface of smallest radius enclosing a bounded subset of n-dimensional Euclidean space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 771—777.

Б л ю м е н т а л ь и Ф р и з (B l u m e n t h a l L. M., F r e e s e R. M.)

1*. Convexidad local en los espacios metricos, *Math. notae*, **18** (1962), 15—22.

Б л я ш к е (B l a s c h k e W.)

1. Über den grössten Kreis in einer konvexen Punktmenge, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **23** (1914), 369—374.

Б о л о б а ш (B o l l o b a s B.)

1*. Star-domains, *Ann. Univ. sci. Budapest., Sec. math.*, **9** (1966), 67—70.

Б о л т я н с к и й В. Г.

1. Задача об освещении границы выпуклого тела, *Изв. Молд. фил. АН СССР*, № 10, (1960), 79—86.

Б о л т я н с к и й В. Г. и Г о х б е р г И. Ц.

1. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1965.

Б о л т я н с к и й В. Г. и Я г л о м И. М.

1*. Выпуклые фигуры и тела, В книге: Энциклопедия элементарной математики, кн. V, М., «Наука», 1966, 182—269.

2*. Геометрические задачи на максимум и минимум, там же, 270—348.

Б о н е н б л у с т (B o h n e n b l u s t H. F.)

1. Convex regions and projections in Minkowski spaces, *Ann. of Math.*, **39**, № 2 (1938), 301—308.

Б о н е н б л у с т, К а р л и н, Ш е п л и (B o h n e n b l u s t H. F., K a r l i n S., S h a p l e y L. S.)

1. Games with continuous, convex pay-off, Ann. of Math. Studies, Princeton, № 24, 1950, 181—192.

Б о н и с, К л и (B o n n i c e W., K l e e V.)

1. The generation of convex hulls, *Math. Ann.*, **152** (1963).

Боннезен и Фенхель (Bonnesen T., Fenchel W.)
1. Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934 ; New York, 1948.

Борель (Borel A.)
1. Cohomologie des espaces localement compacts, d'apres J. Leray, Seminaire de topologie algébrique, 2me ed., École Polytechnique Fédérale, Zurich, 1957.

Борсук (Borsuk K.)
1. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177—190.
2. On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes, *Fund. Math.*, **35** (1948), 217—234.
3. Concerning the Euler characteristic of normal spaces, *Colloq. Math.*, **1** (1948), 206—209.

Бремерман (Bremerman H. J.)
1. Complex convexity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 17—51.
2. Holomorphic functionals and complex convexity in Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 811—831.
3. Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen, *Math. Ann.*, **136** (1958), 173—186.

Брозовский (Brosowski B.)
1*. Über Extremalsignaturen linearer Polynome in p Veränderlichen, *Numer. math.*, **7**, № 5 (1965), 396—405.

Брунн (Brunn H.)
1. Über das durch eine beliebige endliche Figur bestimmte Eigebilde, Boltzmann — Festchrift, Leipzig, 1904, 94—104.
2*. Sätze über zwei getrennte Eikörper, *Math. Ann.*, **104** (1931), 300—324.

Буземан (Busemann H.)
1. On Leibnitz's definition of planes, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 101—111.
2. Геометрия геодезических, М., Физматгиз, 1962.

Буземан и Шепард (Busemann H., Shephard G. C.)
1*. Convexity on nonconvex sets, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen, 1965), Math. Inst. Univ. Copenhagen, 1967, 20—33.

Бураго Ю. Д.
1*. Задача о круге Юнга для сферы, *Матем. просвещ.*, вып. 6 (1961), 165—170.

Валентин (Valentine F. A.)
1. On the extension of a vector functions so as to preserve a Lipschitz condition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 100—108.
2. Contractions in non-Euclidean spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 710—713.
3. A Lipschitz condition preserving extension for a vector function, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 83—93.

4. Set properties determined by conditions on linear sections, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **10** (1946), 925—931.
5. Three point arcwise convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 671—674.
6. A three point convexity property, *Pacific J. Math.*, **79** (1957), 1227—1235.
7. The intersection of two convex surfaces and property P_3, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 47—54.
8. Some topics in the theory of convex sets, Гектографированный курс лекций, Los Angeles, 1959.
9. The dual cone and Helly type theorems. В книге: Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 473—493.
10. Convex sets. N. Y., 1964.
11*. Local convexity and L_n sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1305—1310.

Веблен и Юнг (Veblen O., Young J. W.)
1. Projective geometry, v. 2, Boston, 1918.

Вейль (Weil A.)
1. Sur les théorèmes de de Rham, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 119—145.

Верблюнский (Verblunsky S.)
1. On the circumradius of the bounded set, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 505—507.

Визитей В. Н.
1. Задачи о покрытии и освещении для неограниченных выпуклых фигур, *Изв. АН Молд. ССР*, **10** (1961), 3—9.

Винченцини (Vincensini P.)
1. Figures convexes et variétes linéaires de l'espace euclidien à n dimensions, *Bull. Sci. Math.*, **59** (1935), 163—174.
2. Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes, *Bull. Soc. Math. France*, **67** (1939), 115—119.
3. Sur les ensembles convexes et les involutions algebriques de directions du plan, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 2075—2076.
4. Sur certains ensembles déduits des ensembles d'arcs de cercle ou de calottes spheriques, *Bull. Sci. Math.*, **77** (1953), 1—9.
5. Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps convexes du plan euclidien, Atti IV Congr. Un. Mat. Ital., **2** (1953), 456—464.

Вит (Viet U.)
1. Über die ebenen Eibereichen umbeschriebenen Dreiecke, *Math.-Phys. Semesterber.*, **4** (1954), 57—58.

Волков В. И.
1. О наименьшем радиусе сферы, содержащей данное множество n непрерывных функций, *Уч. зап. Калининск. пед. инст.*, **16** (1953), 3—6.

2. О радиусе замыкающей сферы в линейных подпространствах некоторых метрических пространств, *Уч. зап. Калининск. пед. инст.*, **39** (1964), 6—9.

Выгодский М. Я.

1. О замкнутых линиях с заданной индикатрисой касательных, *Матем. сб.*, **16** (1945), 73—80.

Гаркави А. Л.

1*. Общие теоремы об очистке, *Rev. Math. pures appl.*, **6**, № 2 (1961), 293—303.

2*. О критерии элемента наилучшего приближения, *Сиб. мат. ж.*, 5, № 2 (1964), 472—476.

Гастин (Gustin W.)

1. On the interior of the convex hull of a Euclidean set, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 299—301.
2. Review of Verblunsky [1], *Math. Rev.*, **14**, 495.

Геддам (Gaddum J. W.)

1. Projective convexity in Euclidean space, Abstract 542-155, *Notices Amer. Math. Soc.*, **6** (1958), 309.

Гейл (Gale D.)

1. Linear combinations of vectors with non-negative coefficients, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 46—47.
2. On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 222—225.
3. Соседние вершины на выпуклом многограннике. В сб. переводов «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ., М., 1959, 354—362.
4. On Lipschitzian mappings of convex bodies. В книге: Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 221—223.
5. Neighborly and cyclic polytopes, там же, 225—232.

Гейл и Кли (Gale D., Klee V.)

1. Continuous convex sets, *Math. Scand.*, **7** (1959), 379—397.

Георгиев (Георгиев Г.)

1*. Едно доказателство на теоремата на Хелли за множество от изпъкнали фигури с общи точки, *Годишник Висш. хим.-техн. инст. Бургас,* **2** (1965), 185—188.

Герике (Gericke H.)

1. Über die grösste Kugel in einer konvexen Punktmenge, *Math. Z.*, **40** (1936), 317—320.

Гика (Ghika A.)

1. Ensembles A-convexes dans les Δ-modules, *Com. Acad. R. P. Romîne*, **2** (1952), 669—671.
2. Propriétés de la convexité dans certains modules, *Com. Acad. R. P. Romîne*, **3** (1953), 355—360.
3. Séparation des ensembles convexes dans les espaces lignés non vectoriels, *Acad. R. P. Romîne Bul. Şti. Sect. Şti. Mat. Fiz.*, **7** (1955), 287—296.
4. Ensembles entiers, convexes, serrés et absorbants, dans les groupes à radicaux, *Com. Acad. R. P. Romîne*, **5** (1955), 1229—1233.

5. Groupes topologiques localement paraconvexes, *Com. Acad. R. P. Romîne*, **5** (1955), 1235—1240.

Гильберт Д.

1. Основания геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

Главка (Hlawka E.)

1. Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, *Monatsh. Math.*, **53** (1949), 81—131.

Гохберг И. Ц. и Маркус А. С.

1. Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, *Изв. Молдавск. фил. АН СССР*, **10** (1960), 87—90.

Грёмер (Groemer H.)

1. Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper die einen konvexen Körper berühren, *Monatsh. Math.*, **65** (1961), 74—81.
2. Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Tetraeder, *Monatsh. Math.*, **66** (1962), 12—15.

3*. Über die Zerlegung des Raumes in homotetische konvexe Körper, *Monatsh. Math.*, **68**, № 1 (1964), 21—32.

4*. Über ebene Schnitte von Lagerungen, *Monatsh. Math.*, **70** (1966), 213—222.

Грёч (Grötzsch H.)

1. Zur Theorie der diskreten Gebilde. VII. Ein Dreifarbensatz für dreieksfreie Netze auf der Kugel, *Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenburg Math.-Nat. Reihe*, **8** (1958—59), 109—119.

Грин и Гастин (Green J. W., Gustin W.)

1. Quasiconvex sets, *Canad. J. Math.*, **2** (1950), 489—507.

де Гроот и де Фриз (de Groot J., de Vries H.)

1. Convex sets in projective spaces, *Comp. Math.*, 13 (1957), 113—118.

Грюнбаум (Grünbaum B.)

1. On a theorem of L. A. Santaló, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 351—359.
2. A theorem on convex sets, *Bull. Res. Council Israel*, **5** (1956), 50.
3. Borsuk's partition conjecture in Minkowski spaces, *Bull. Res. Council Israel*, 7 (1957), 25—30.
4. A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957), 776—778.
5. On common secants for families of polygons, *Riveon Lematematika*, **12** (1958), 37—40.
6. On common transversals, *Arch. Math.*, **9** (1958), 465—469.
7. On a theorem of Kirszbraun, *Bull. Res. Council Israel*, **7** (1958), 129—132.
8. On some covering and intersection properties in Minkowski spaces, *Pacific J. Math*, **9** (1959), 487—494.
9. On intersections of similar sets, *Portugal. Math.*, **18** (1959), 155—164.

10. A variant of Helly's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 517—522.
11. Common transversals for families of sets, *J. London Math. Soc.*, 35 (1960), 408—416.
12. Some applications of expansion constants, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 193—201.
13. Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1257—1261.
14. Subsets of S^n contained in a hemisphere, *An. Acad. Brasil Ci.*, **32** (1960), 323—328.
15. On a conjecture of Hadwiger, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 215—219.
16. Measures of symmetry for convex sets. В книге: Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 233—270.
17. Borsuk's problem and related questions, там же, 271—284.
18. The dimension of intersections of convex sets, *Pacific J. Math.*, **12** (1961), 197—202.
19. A generalisation of theorems of Kirszbraun and Minty, *Proc. Amer. Math. Soc.* (в печати).
20. Common secants for families of polyhedra, *Arch. Math.*, **15** (1964), 76—80.
21. Fixing systems and inner illumination, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), 161—163.
22. Convex polytopes, New York, 1967.

Грюнбаум и Моцкин (Grünbaum B., Motzkin T. S.)

1. On components in some families of sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 607—613.
2. On polyhedral graphs. В книге: Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 285—290.

Гуйла-Ури (Ghouila-Houri A.)

1. Sur l'étude combinatoire des familles de convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 494—496.

Данцер (Danzer L.)

1. Über ein Problem aus der kombinatorischen Geometrie, *Arch. Math.*, 8 (1957), 347—351.
2. Über zwei Lagerungsprobleme (Abhandlungen einer Vermutung von T. Gallai), Диссертация, Technische Hochschule, Munich, 1960.
3. Über Durchschnittseigenschaften n-dimensionaler Kugelfamilien, *J. Reine Angew. Math.*, **208** (1961), 181—203.
4. Über Durchschnittseigenschaften konvexer homothetischer Bereiche in der Ebene, *J. Reine Angew. Math.* (в печати).
5. On the k-th diametr in E^d and a problem of Grünbaum, Proc. Collog. Convexity (Copenhagen, 1965), Math. Inst. Univ Copenhagen, 1967, 41.

Данцер и Грюнбаум (Danzer L., Grünbaum B.)

1. Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdös und von V. L. Klee, *Math. Z.*, **79** (1962), 95—99.

Данцер, Лаугвиц, Ленц (Danzer L., Laugwitz D., Lenz H.)
1. Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikorper einbeschriebenen Ellipsoiden, *Arch. Math.*, **8** (1957), 214—219.

Дворецкий (Dvoretzky A.)
1. A converse of Helly's theorem on convex sets, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 345—350.

Де-Сантис (De Santis R.)
1. A generalisation of Helly's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 336—340.

Джон (John F.)
1. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Studies and essays presented to R. Courant., N. Y., 1948, 187—204.

Динеш и Мак-Кой (Dines L. L., McCoy N. H.)
1. On linear inequalities, *Trans. Roy. Soc. Canada*, Sect. III, **27** (1933), 37—70.

Дрендел (Drandell M.)
1. Generalized convex sets in the plane, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 537—547.

Дрешер (Dresher M.)
1. Problem 4361; Solution, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 557; **58** (1951), 272—273.

Дукор И. Г.
1. К теореме Хелли о совокупности выпуклых тел с общими точками, *УМН*, вып. 10 (1944), 60—61.

Ельмслев (Hjelmslev J.)
1. Contribution à la géométrie infinitesimale de la courbe reelle, *Overs. Danske Vidensk. Selsk. Förh.* (1911), 433—494.

Ефремович В. А.
1*. Основные топологические понятия, Энциклопедия элементарной математики, кн. V, «Наука», М., 1966, 477—556.

Загускин В. Л.
1. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема, *УМН*, **13**, № 6 (1958), 89—93.

Залгаллер В. А.
1*. Замечания о задаче Радо, *Матем. просвещ.*, вып. **5** (1960), 141—148.

Зуховицкий С. И.
1*. О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева, *УМН*, **11**, № 2 (1956), 125—159.

Зюсс (Süss W.)
1. Über die kleinste Kugel, die jede Figur gegebenen Durchmessers einschliesst, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20** (1955), 115—116.

Какутани (Kakutani S.)

1. Some characterizations of Euclidean space, *Jap. J. Math.*, **16** (1939), 93—97.

Калиш, Страус (Kalisch G. K., Straus E. G.)

1. On the determination of points in a Banach space by their distances from the points of given set, *An. Acad. Brasil Ci.*, **29** (1958), 501—519.

Каратеодори (Carathéodory C.)

1. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, *Math. Ann.*, **64** (1907), 95—115.
2. Über den Variabilitätsbereich der Fourieschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **32** (1911), 193—217.

Карлин С.

1. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964.

Карлин и Шепли (Karlin S., Shapley L. S.)

1. Some applications of a theorem on convex functions, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 148—153.

Кёйпер (Kuiper N. H.)

1. On convex sets and lines in the plane, *Nederl. Akad. Wetensch.*, **60** (1957), 272—283.

Келли Дж. (Kelley J. L.)

1. Banach spaces with the extension property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 323—326.

Келли Л. (Kelly L. M.)

1. Covering problems, *Math. Mag.*, **19** (1944—45), 123—130.

Кендел (Kendall D. G.)

1. Simplexes and vector lattices, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 365—371.

Кёниг (König D.)

1. Über konvexe Körper, *Math. Z.*, **14** (1922), 208—220.

Кийне (Kijne D.)

1. On collinearities of two-dimensional convex bodies, *Nieuw Arch. Wiskunde*, **5** (1957), 81—83.

Кирхбергер (Kirchberger P.)

1. Über Tschebyschefsche Annäherugsmethoden, *Math. Ann.*, **57** (1903), 509—540.

Киршбраун (Kirszbraun M. D.)

1. Über die zusammenziehenden und Lipschitzschen Transformationen, *Fund. Math.*, **22** (1934), 77—108.

Кли (Klee V.)

1. On certain intersection properties of convex sets, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 272—275.
2. The critical set of a convex body, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 178—188.

3. Common secants for plane convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 639—641.
4. The structure of semispace, *Math. Scand.*, **4** (1956), 54—64.
5. Circumspheres and inner products, *Math. Scand.*, **8** (1960), 363—370.
6. Infinite-dimensional intersection theorems. В книге: Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 349—360.
7. The Euler characteristic in combinatorial geometry, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 119—121.
8. The generation of affine hulls, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **24** (1963), 60—81.

Кнастер, Куратовский, Мазуркевич (Knaster B., Kuratowski K., Mazurkiewicz S.)
1. Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.*, **14** (1929), 132—137.

Кнезер М. (Kneser M.)
1. Konvexe Räume, *Arch. Math.*, **3** (1952), 198—206.

Кнезер М., (Kneser M.)
1. Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass, *Arch. Math.*, **6** (1955), 382—390.

Коксетер (Coxeter H. S. M.)
1. An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size. В книге Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 53—71.

Коксетер, Фью, Роджерс (Coxeter H. S. M., Few L., Rogers C. A.)
1. Coverning the space with equal spheres, *Mathematika*, **6** (1959), 147—157.

Комфорт и Гордон (Comfort W. W., Gordon H.)
1. Inner product spaces and the tri-spherical intersection property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 327—329.

Космак (Kosmák L.)
1. Poznamka o Hellyově větě, *Spisy Přirodov. Fak. Univ. Brně*, № **5** (1963), 223—225.

Кошинский (Kosiński A.)
1. A theorem on families of acyclic sets and its applications, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 317—325.

Красносельский М. А.
1. Об одном критерии звездности, *Матем. сб.*, **19** (1946), 309—310.
2. Об одном доказательстве теоремы Хелли о совокупностях выпуклых тел с общими точками, *Труды Воронежск. ун-та*, **33** (1954), 19—20.

Крейн М. Г.
1*. Об одной теореме М. Я. Выгодского, *Матем. сб.*, **18** (60), (1946), 447—450.

Крейн М. Г. и Мильман Д. П. (Krein M., Milman D.)
1*. On extreme points of regulary convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), 133—138.

Кун (Kuhn H. W.)
1. Contractibility and convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 777—779.

Лагранж (Lagrange R.)
1. Sur le tétraèdre et sur la sphère minimum contenant un ensemble de points, *Bull. Sci. Math.*, **67** (1943), 108—115.

Ланнер (Lannér F.)
1. On convex bodies with at least one point in common, *Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förh.*, **13** (1943), 41—50.

Леви (Levi F. W.)
1. On Helly's theorem and the axioms of convexity, *J. Indian Math. Soc.*, **15** (1951), 65—76.
2. Eine Ergänzung zum Helly'schen Satze, *Arch. Math.*, **4** (1953), 222—224.
3. Ein geometrisches Überdeckungsproblem, *Arch. Math.*, **5** (1954), 476—478.
4. Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns, *Arch. Math.*, **6** (1955), 369—370.

Лейхтвейс (Leichtweiss K.)
1. Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie, *Math. Z.*, **62** (1955), 37—49

Леккеркеркер и Боланд (Lekkerkerker C. G., Boland J. C.)
1. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.*, **51** (1962), 45—64.

Лелек (Lelek A.)
1*. O pokryciach i rozkladach figur geometricznych, *Matematyka*, **16** (1963), 81—85.

Лелек и Нитка (Lelek A., Nitka W.)
1. On convex metric spaces. I, *Fund. Math.*, **49** (1961), 183—204.

Лере (Leray J.)
1. Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations, *J. Math. Pures Appl.*, **24** (1945), 95—167.

Майер (Mayer A. E.)
1. Eine Überkonvexität, *Math. Z.*, **39** (1935), 511—531.

Майкл (Mickle E. J.)
1. On the extension of a transformation, *Bull. Amer. Math Soc.*, **55** (1949), 160—164.

Мак-Шейн (McShane E. J.)
1. Exstension of range of functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 837—842.

М а р к о в А. А.
1. On the definition of a complex, *Матем. сб.*, **5** (**47**) (1939), 545—550.

Маршо (Marchaud A.)
1. Convexité et connexité lineaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **249** (1959), 2141—2143.

Мельзак (Melzak Z. A.)
1. A note on sets of constant width, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 493—497.
2. A property of plane sets of constant width. *Canad. Math. Bull.*, **6** (1963), 409—415.
3*. Problems connected with convexity, *Canad. Math. Bull.*, **8**, № 5 (1965), 565—573.
4*. A note on the Borsuk conjecture, *Canad. Math. Bull*, **10** (1967), 1—3.

Менгер (Menger K.)
1. Untersuchungen über allgemeine Metrik, *Math. Ann.*, **100** (1928), 75—163.

Мешковский (Meschkowski H.)
1*. Ungeloste und unlösbare Probleme der Geometrie, Braunschweig, 1960.

Милнор Дж.
1. Лекции о характеристических классах, сб. *Математика*, **3 : 4** (1959), 3—53; **9 : 4** (1965), 3—40.

Минковский (Minkowski H.)
1. Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder, Ges. Abh., B. **2**, Berlin, 1911, 103—121.

Минти (Minty G. J.)
1. On the simultaneous solution of a certain system of linear inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 11—12.

Михаэль (Michael E.)
1. Convex structures and continuous selections, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 556—575.
2. Paraconvex sets, *Math. Scand.*, **7** (1959), 372—376.

Мольнар (Molnár J.)
1. Über eine Verallgemeinerung auf die Kugelfläche eines topologischen Satzes von Helly, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 107—108.
2. Über den zweidimensionalen topologischen Satz von Helly, *Math. Lapok*, **8** (1957), 108—114.
3. Über eine Vermutung von G. Hajos, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8** (1957), 311—314.
4. Über eine Übertragung des Hellyschen Satzes in sphärische Räume, *Acta Math. Sci. Hungar.*, **8** (1957), 315—318.
5. Über Sternpolygone, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1958), 241—245.

Монна (Monna A. F.)
1. Ensembles convexes dans les espaces vectoriels sur un corps valué, *Nederl. Akad. Wetensch.*, **20** (1958), 528—539.

Моцкин (Motzkin T. S.)
1. Linear inequalities, Мимеогр. лекции, Los-Angelos, 1951.
2. A proof of Hilbert's Nullstellensatz, *Math. Z.*, **63** (1955), 341—344.
3. Comonotone curves and polyhedra, Abstract 111, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63** (1957), 35.
4. Endovectors. В книге Convexity (ed. V. Klee), 1963, 361.
5. Convex sets in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* (в печ.).

Моцкин и Страус (Motzkin T. S., Straus E. G.)
1. Representation of points of a set as linear combinations of boundary points. В книге: Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 389—392.

Мэрхубер (Mairhuber J. C.)
1. On Haar's theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 609—615.

Нахбин (Nachbin L.)
1. A theorem of the Hahn — Banach type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 28—46.
2. Some problems in extending and lifting continuous linear transformations, Proc. of the Int. Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961, 340—350.

Нейенхейс (Nijenhuis A.)
1. A note on hyperconvexity in Riemannian manifolds, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 576—582.

Нейман (Neumann B. H.)
1. On an invariant of plane regions and mass distributions, *J. London Math. Soc.*, **20** (1945), 576—582.

Неф (Nef W.)
1. Konvexe Räume, *Arch. Math.*, **4** (1953), 216—221.

Паскуалини (Pasqualini L.)
1. Superconvexité, *Bull. Cl. Sci. Acad. Belg.*, **25** (1939), 18—24.

Петеану (Peteanu V.)
1*. A supra multimilor convexe care admit secante comune, *Studii si Cercetări Mat., Acad. RPR Fil. Cluj*, **14**, № 2 (1963), 355—363.

Планкет (Plunkett R. L.)
1. Concerning two types of convexity for metrics, *Arch. Math.*, **10** (1959), 42—45.

Пок (Pauc C.)
1. Sur la convexité dans les espaces distanciés, *Rev. Sci.*, **78** (1940), 233.

Поляк и Полякова (Polák V., Poláková N.)
1. Some remarks on indispensable elements in the systems of half spaces in E_n, *Spisy Přirodo Fak. Univ. Brně* (1963), 229—262.
2*. Remarks to some problems of discrete geometry, *Spisy Přirod. Fak. Univ. Brně*, № 6 (1964), 293—323.

Поульсен (Poulsen E. T.)
1. Probleme 10, *Math. Scand.*, **2** (1954), 346.

Пренович (Prenowitz W.)
1. A. contemporary approach to classical geometry, H. E. Slaught Memorial Paper, *Amer. Math. Monthly*, **68**, № 9 (1961).

Проскуряков И. В.
1. Об одном свойстве n-мерного аффинного пространства, связанном с теоремой Хелли, *УМН*, **14**, № 1 (1959), 219—222.

Птак (Pták V.)
1. A remark on approximation of continuous functions, *Czechoslovak Math. J.*, 8 (1958), 251—256.
2. On the absolutely convex envelope of a set in a finite-dimensional vector space, *Časopsis Pěst. Mat.*, **83** (1958), 343—347.

Рабин (Rabin M.)
1. A note on Helly's theorem, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 363—366.

Радемахер, Диксон, Плоткин (Rademacher H., Dicson R., Plotkin M.)
1*. A packing problem for parallelepipeds, *J. Combin. Theory*, **1** (1966), 3—14.

Радемахер и Шёнберг (Rademacher H., Schoenberg I. J.)
1. Helly's theorem on convex domains and Tchebycheff's approximation problem, *Canad. J. Math.*, **2** (1950), 245—256.

Радо (Rado R.)
1. A theorem on general measure, *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 291—300.
2. A theorem on Abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 219—226.
3. A sequence of polyhedra having intersections of specified dimensions, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 287—290.
4. Covering theorems for ordered sets, *Proc. London Math. Soc.*, **50** (1948), 509—535.
5. A theorem on sequences of convex sets, *Quart. J. Math.*, **3** (1952), 183—186.
6. Theorems on the intersection of convex sets of points, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 320—328.

Радон (Radon J.)
1. Über eine Erweiterung des Begriffs der konvexen Funktionen, mit einer Anwendung auf die Theorie der konvexen Körper, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, **125** (1916), 241—258.
2. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, *Math. Ann.*, **83** (1921), 113—115.

Рей (Reay J. R.)
1. Generalization of a theorme of Carathéodory, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **54** (1965), 1—50.

2. A new proof of the Bonnice — Klee theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 585—587.

Ремез Е. Я.

1. Про деякі властивості конвексної оболонки точкової множени та про задачу мінімального наближения, *Сб. тр. Инст. матем. АН УССР*, **1** (1938), 115—130.

Ренкин (Rankin R. A.)

1. The closest packing of spherical caps in *n* dimensions, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **2** (1955), 139—144.

Реньи А., Реньи К., Шураньи (Rényi A., Rényi C., Surányi J.).

1. Sur l'indépendance des domaines simples dans l'espace euclidien à *n* dimensions, *Colloq. Math.*, **2** (1951), 130—135.

Ривлин и Шапиро (Rivilin T. J., Shapiro H. S.)

1*. A unified approach to certain problems of approximation and minimization, *J. SIAM*, **9**, № 4 (1961), 670—699.

Робинсон (Robinson C. V.)

1. A characterization of the disc, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941), 818—819.
2. Spherical theorems of Helly type and congruence indices of spherical caps, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), 260—272.

Робкин и Валентин (Robkin E. E., Valentine F. A.)

1. Families of parallels associated with sets, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 147—157.

Роджерс (Rogers C. A.)

1. A note on covering, *Mathematika*, **4** (1957), 1—6.
2. The packing of equal spheres, *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1958), 609—620.

3*. Укладки и покрытия, М., «Мир», 1968.

Роджерс и Шепард (Rogers C. A., Shephard G. C.)

1. The difference body of a convex body, *Arch. Math.*, **8** (1957), 220—223.
2. Convex bodies associated with a given convex body, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 270—281.

Родстрём (Rådström H.)

1. Convexity and norm in topological groups, *Ark. Mat.*, **3** (1952), 99—137.
2. One-parameter semigroups of subsets of a real linear space, *Ark. Mat.*, **4** (1960), 87—97.

Рокфеллер (Rockafellar R T.)

1. Helly's theorem and minima of convex functions, *Duke Math. J.*, **32** (1965), 381—397.

Сандгрен (Sandgren L.)

1. On convex cones, *Math. Scand.*, **2** (1954), 19—28; поправка там же, **3** (1955), 170.

С а н т а л о (S a n t a l ó L. A.)

1. Un teorema sôbre conjuntos de paralelepipedos de aristas paralelas, *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, **2** (1940), 49—60.
2. Complemento a la nota: Un teorema sôbre conjuntos de paralelepipedos de aristas paralelas, *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, **3** (1942), 202—210.
3. Una propriedad caracteristica del circulo, *Math. Notae*, **3** (1943), 142—147.
4. Propriedades de las figuras convexas sôbre la esfera, *Math. Notae*, **4** (1944), 11—40.
5. Convex regions on the n-dimensional spherical surface, *Math. Ann.*, **47** (1946), 448—459.
6. Sôbre figuras planas hiperconvexas, *Summa Brasil. Math.*, **1** (1946), 221—239.
7. Sôbre pares de figuras convexas, *Gaz. Math. (Lisboa)*, **12**, № 50 (1951), 7—10; поправка там же, **14**, № 54 (1953), 6.

С в е р ч к о в с к и й (Ś w i e r c z k o w s k i S.)

1. On chains of regular tetrahedra, *Colloq. Math.*, **7** (1959), 9—10.

С в и н н е р т о н - Д а й е р (S w i n n e r t o n - D y e r H. P. F.)

1. Extremal lattices of convex bodies, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 161—162.

С е й е р (S a w y e r D. B.)

1*. Convex bodies and the diagonal group, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 466—468.

С е к е ф а л ь в и - Н а д ь (S z ö k e f a l v i - N a g y B.)

1. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 169—177.

С к о р н я к о в Л. А.

1. Системы кривых на плоскости, *ДАН*, **98** (1954), 25—26.

С о к о́ л и н А. С.

1*. Об одной задаче Радо, *ДАН СССР*, **26** (1940), 868—869.

С о л т а н П. С.

1. Об освещении границы выпуклого тела изнутри, *Матем. сб.*, **57**, № **4** (1962), 443—448.
2. К задачам о покрытии и освещении выпуклых фигур, *Изв. АН Молд. ССР*, № 1 (1963), 49—57.
3. Относительно задачи о покрытии и освещении выпуклых тел. *Учен. зап. Кишиневск. гос. ун-та,* **82** (1965), 69—74.
4. Об отношениях между задачами покрытия и освещения выпуклых тел, *Изв. АН Молд. ССР*, **4** (1966), 91—93.

С о р о к и н В. А.

1*. Геометрия Минковского с несимметричной индикатрисой, *Уч. зап. Моск. гос. пед. инст.*, **243** (1965), 160—185.
2*. О теоремах Юнга и Бляшке для плоскости Минковского, *Уч. зап. Моск. гос. пед. инст.*, **271** (1968), 138—145.

Стами и Мар (Stamey W. L., Marr J. M.)
1*. Unions of two convex sets, *Canad. J. Math.*, **15**, № 1 (1963), 152—156.

Стахо (Stachó L.)
1. Über ein Problem für Kreisscheibenfamilien, *Acta scient. Math.* (*Szeged*), **26**, № 3—4 (1965), 273—282.

Стёлинга (Stoelinga T. G. D.)
1. Convexe Puntverzamelingen, Диссертация, Univ. Groningen, 1932.

Стильтьес (Stieltjes T.-J.)
1. Sur la théorie des nombres, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, **4** (1890), 1—103.

Стинрод Н.
1. Топология косых произведений, М., ИЛ, 1953.

Стоун (Stone M. H.)
1. Convexity, Мимеографированные лекции, Chicago, 1946.
2. Postulates for the barycentric calculus, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 29 (1949), 25—30.

Страшевич (Straszewicz S.)
1. Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen, Диссертация, Zurich, 1914.

Тверберг (Tverberg H.)
1. A generalization of Radon's theorem, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 123—128.

Тиман Т. А.
1*. Доказательство одной геометрической теоремы Юнга и ее аналог в теории стохастических процессов, *Успехи мат. наук*, **20**, № 3 (1965), 213—218.

Титце (Tietze H.)
1. Über das Problem der Nachbargebiete im Raum, *Monatsh. Math.*, **16** (1905), 211—216.
2. Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit, Munich, 1949.

Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
1. Convex regions in the geometry of paths, *Quart. J. Math.*, **3** (1932), 33—42.

Фан (Fan K.)
1. On the Krein—Milman theorem, Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 211—219.

Фари (Fáry I.)
1. A characterization of convex bodies, *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 25—31.

Фейеш Тот (Fejes Tóth L.)
1. Über die Überdeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten, *Mat. Fiz. Lapok*, **50** (1943), 40—46.
2. Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **53** (1943), 66—68.

10 Зак. 1203

3. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958.
4*. Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, *Elem. Math.*, **15** (1960), 25—36.
5*. Ujabb eredmények a diszkrét geometriában, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.*, **13** (1963), 341—354.

Ф е н х е л ь (F e n c h e l W.)
1. Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven, *Math. Ann.*, **101** (1929), 238—252.
2. Geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenen Tangentenbild, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **39** (1930), 183—185.
3. A remark on convex sets and polarity, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, Tome Supplémentaire, 1952, 82—89.
4. On the convex hull of point sets with symmetry properties, *Rend. Mat. e Appl.*, **14** (1955), 355—358.

Ф р а н к л и н (F r a n k l i n S. P.)
1. Some results on order convexity, *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 357—359.

Ф р у х т (F r u c h t R.)
1. Sobre un çierto şistema de segmentos, *Rev. Un. Mat. Argentina*, **7** (1941) 134—135.

Х а д в и г е р (H a d w i g e r H.)
1. Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers, *Comment. Math. Helv.*, **19** (1946—47), 72—73.
2. Über eine symbolisch-topologische Formel, *Elem. Math.*, **2** (1947), 35—41.
3. Ungelöste Probleme № 2, *Elem. Math.*, **9** (1954), 133—134.
4. Kleine Studie zur kombinatorischen Geometrie der Sphäre, *Nagoya Math. J.*, **8** (1955), 45—48.
5. Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie, *J. Reine Angew. Math.*, **194** (1955), 101—110.
6. Ungelöste Probleme № 7, *Elem. Math.*, **10** (1955), 111.
7. Problem 107, *Nieuw Arch. Wiskunde* (3), **4** (1956), 57; Solution, *Wisk. Opgaven*, **20** (1957), 27—29.
8. Über einen Satz Hellyscher Art, *Arch. Math.*, **7** (1956), 377—379.
9. Ungelöste Probleme № 11, *Elem. Math.*, **11** (1956), 60—61.
10. Über Eibereiche mit gemeinsamer Treffgeraden, *Portugal. Math.*, **16** (1957), 23—29.
11. Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern, *Arch. Math.*, **8** (1957), 212—213.
12. Ungelöste Probleme № 15, *Elem. Math.*, **12** (1957), 10—11, 62.
13. Ungelöste Probleme № 19, *Elem. Math.*, **12** (1957), 109—110.
14. Ungelöste Probleme № 20, *Elem. Math.*, **12** (1957), 121.
15. Лекции об объеме, площади и изопериметрии, М., «Наука», 1966.

16. Ungelöste Probleme № 38, *Elem. Math.*, **15** (1960), 130—131.

Хадвигер и Дебруннер (Hadwiger H., Debrunner H.)

1. Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene, *Enseignement Math.*, **1** (1955), 56—89.
2. Über eine Variante zum Hellyschen Satz, *Arch. Math.*, **8** (1957), 309—313.
3. Kombinatorische Geometrie in der Ebene, Geneva, 1960; русский перевод — Комбинаторная геометрия на плоскости, М., «Наука», 1966; англ. перевод — см. Хадвигер, Дебруннер, Кли [1]. (Русское и английское издания расширены по сравнению с оригиналом.)

Хадвигер, Эрдёш, Фейеш Тот, Кли (Hadwiger H., Erdös P., Feies Tóth L., Klee V.)

1. Ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie, Basel (готовится к печати).

Хальберг, Левин, Страус (Halberg C. J. A., Jr., Levin E., Straus E. G.)

1. On continuous congruent sets in Euclidean space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 335—344.

Хаммер (Hammer P. C.)

1. Maximal convex sets, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 103—106.
2. Semispaces and the topology of convexity. В книге. Convexity (ed. V. Klee), Providence, 1963, 305—316.

Ханнер (Hanner O.)

1. Intersections of translates of convex bodies, *Math. Scand.*, **4** (1956), 65—87.

Ханнер, Родстрём (Hanner O., Rådström H.)

1. A generalization of a theorem of Fenchel, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 589—593.

Хедок (Haddock A. C.)

1. Some theorems related to a theorem of E. Helly, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**, № 4 (1963), 636—637.

Хейл (Heil T. W.)

1*. Subdivisions of *n*-dimensional convex sets in translates, Диссертация, Univ. Ariz., 1966; Dissert. Abstrs., B27, № 5 (1966), 1543.

Хелли (Helly E.)

1. О совокупности выпуклых тел с общими точками, *УМН*, вып. 2 (1936), 80—81.
2. Über Systeme abgeschlossener Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, *Monatsh. Math.*, **37** (1930), 281—302.

Хеппеш (Heppes A.)

1. On the splitting of point sets in three-space into the union of sets of smaller diameter, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), 413—416.

Хеппеш и Мольнар (Heppes A., Molnár Y.)

1*. Ujabb credmények a diszkrét geometriában, I—III, *Mat. Lapok*, **11** (1960), 330—355; **13** (1962), 39—72; **16** (1965), 19—41.

Херроп и Радо (Harrop R., Rado R.)

1. Common transversals of plane sets, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 85—95.

Хорн (Horn A.)

1. Some generalizations of Helly's theorem on convex sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 923—929.

Хорн, Валентин (Horn A., Valentine F. A.)

1. Some properties of L-sets in the plane, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 131—140.

Хопф (Hopf E.)

1. Lösung der Aufgabe 299 von H. Kneser und W. Süss (**51** (1941), 3), *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **53** (1943), 40.

Худеков Н. Н.

1*. О типах общего расположения $n+2$ точек в R_n, *Матем. сб.*, **9(51)**, № 2 (1941), 249—276.

Хэр, Геддам (Hare W. R., Jr., Gaddum J. W.).

1. Projective convexity in topological linear spaces and a certain connection with property P_3, Abstract 576—228 *Notices Amer. Math. Soc.*, **7** (1960), 984—985.

Цаустинский (Zaustinsky E. M.)

1. Spaces with non-symmetric distance function, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **34** (1959), 1—91.

Ципсер и Гехер (Czipszer J., Gehér L.)

1. Extension of functions satisfying a Lipschitz condition, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6** (1955), 213—220.

Чакерян и Штейн (Chakerian G. D., Stein S. K.)

1. On measures of symmetry of convex bodies, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 497—504.
2. Some intersection properties on convex bodies, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 109—112.

Шашкин Ю. А.

1*. Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **26** (1962), 495—512.

2*. Замечание о соседних вершинах на выпуклом многограннике, *УМН*, **18**, № 5 (1963), 209—211.

3*. Конечно определенные линейные операторы в пространствах непрерывных функций, *УМН*, **20**, № 6 (1965), 175—180.

4*. Интерполяционные семейства функций и вложения множеств в эвклидовы и проективные пространства, *ДАН СССР*, **74**, № 5 (1967), 1030—1032.

5*. Теория приближений в линейных нормированных пространствах, изд-во Уральск. Ун-та, 1967.

Швеппе (Schweppe E. J.)
1. A projective generalization of convexity, Abstract 305, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63** (1957), 137.

Шёнберг (Schoenberg I. J.)
1. On a theorem of Kirszbraun and Valentine, *Amer. Math. Monthly*, **60** (1953), 620—622.

Шепард (Shephard G. C.)
1*. Reducible convex sets, *Mathematika*, **13** (1966), 49—50.

Шерк (Scherk P.)
1. On Carathéodory's theorem, *Canad. Math. Bull.*, **9**, № 4 (1966), 463—465.

Шимрат (Shimrat M.)
1. Simple proof of a theorem of P. Kirchberger, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 361—362.

Шнирельман Л. Г.
1. О равномерных приближениях, *Изв. АН СССР*, **2** (1938), 53—59.

Шоке (Choquet G.)
1. Unicité des représentations intégrales au moyens de points extrémaux dans les cônes convexes reticulés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **243** (1956), 555—557.
2. Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, Мимеографированное издание, *Séminaire Brelot — Choquet — Deny*, **6**, № 8, 1962, 1—13.

Шоош (Soos G.)
1. Ausdehnung des Hellyschen Satzes auf den Fall vollständiger konvexer Flächen, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 244—247.

Шопп (Schopp J.)
1. Über einen Kreisüberdeckungssatz und seine Äquivalenz mit dem Gallaischen Kreisabstechensproblem, 2-nd Congr. Math. Hungar., Budapest, 1960, vol. **1**, 57—59.

Штейниц (Steinitz E.)
1. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, I; II; III, *J. Reine Angew. Math.*, **143** (1913), 128—175; **144** (1914), 1—40; **146** (1916), 1—52.

Штейнхаген (Steinhagen P.)
1. Über die grösste Kugel in einer konvexen Punktmenge, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1** (1921), 15—26.

Эглстон (Eggleston H. G.)
1. On Rado's extension of Crum's problem, *J. London Math. Soc.*, 28 (1953), 467—471.
2. Notes on Minkovski geometry. I, Relations between the circumradius, diameter, inradius, and minimal width of a convex set, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 76—81.
3. Convexity, Cambridge, 1958.

4. Minimal universal covers in E^n, *Israel J. Math.*, **1**, № 3 (1963), 149—155.

Эдельштейн (Edelstein M.)

1. Contributions to set-theoretic geometry in topological groups, Диссертация, Technion, Haifa, 1958.

Эллис (Ellis J. W.)

1. A general set-separation theorem, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 417—421.

Эрдёш и Роджерс (Erdös P., Rogers C. A.)

1. Covering space with convex bodies, *Acta Arith.*, **7** (1962), 281—285.

Эрдёш и Секереш (Erdös P., Szekeres G.)

1. A combinatorial problem in geometry, *Comp. Math.*, **2** (1935), 463—470.
2. On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos. Sect. Math.*, **3—4** (1960—61), 53—62.

Эрхарт (Ehrhart E.)

1. Le plus petit couvercle circulaire de *n* poinst, *Enseignement Math.*, **6** (1960), 47—50.

Юнг (Jung H. W.)

1. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst, *J. Reine Angew. Math.*, **123** (1901), 241—257.

Юссила (Jussila O. K.)

1. On a theorem of Floyd, Abstracts Int. Cong. Math. Stockholm, 1962, 133.

Юцович (Jucovič F.)

1*. Über die minimale Dicke einer *k*-fachen Kreiswolke, *Ann. Univ. scient. Budapest.*, **9** (1966), 143—146.

Яглом И. М.

1*. Выпуклые тела и чебышевские приближения функций, *Учен. зап. Моск. гос. пед. инст.*, **208** (1963), 395—407.

Яглом И. М. и Болтянский В. Г.

1. Выпуклые фигуры, М., Гостехиздат, 1951. (Нем. перевод — Berlin, 1956; англ. перевод — N. Y., 1961; немецк. и англ. издания расширены по сравнению с оригиналом.)

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

Альфсен (Alfsen E. M.)

1. On the geometry of Choquet simplexes, *Math. Scand.*, **15** (1964), 97—110.
2. On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, *Math. Scand.*, **17** (1965), 169—176.
3. On Choquet simplexes, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen 1965), Math. Inst. Univ. Copenhagen, 1967, 1—8.

Анусиак (Anusiak J.)

1. On set-theoretically independent collections of balls, *Colloq. Math.*, **13** (1965), 223—233.

Бамба, Роджерс, Цассенхауз (Bambah R. P., Rogers C. A., Zassenhaus H.)

1. On coverings with convex domains, *Acta Arithm.*, **9** (1964), 191—207.

Безикович (Besicovitch A. S.)

3. On arc that cannot be covered by an open equilateral triangle of side 1, *Math. Gas.*, **49** (1965), 286—288.

Бек (Beck P. A.)

1. Determination of coexisting phases in heterogeneous systems of many components, *J. Appl. Phys.*, **16** (1945), 808—815.

Бекер (Baker M. J. C.)

1. A Helly-type theorem on a sphere, *J. Austral. Math. Soc.*, **7** (1967), 323—326.
2. A spherical Helly-type theorem, *Pacific J. Math.*, **23** (1967), 1—3.

Бёрлинг (Burling J. F.)

1. Диссертация, Univ. Colorado (не опубликовано).

Бонис и Рей (Bonnice W. E., Reay J. R.)

1. Interior points of convex hulls, *Israel J. Math.*, **4** (1966), 243—248.
2. An extension of the Bonnice — Klee theorem (в печати).

Браудер (Browder F. E.)

1. Existence and perturbation theorems for nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 322—327.

Бройш и Ньюмен (Breusch R., Newman D. J.)
1. Covering a rectangle with two smaller similar rectangles, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 450—451.

Брэгман Л. М.
1*. Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования, *ДАН СССР*, **162**, № 3 (1965), 487—490.
2*. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для задачи оптимизации, *ДАН СССР*, **171**, № 5 (1966), 1019—1022.

Буземан Г. и Келли П.
1*. Проективная геометрия и проективные метрики, М., ИЛ, 1957.

Веглорц (Weglorz B.)
1. Nerves and set-theoretical independence, *Colloq. Math.*, **13** (1964), 17—19.

Вегнер (Wegner G.)
1. Über eine kombinatorischgeometrische Frage von Hadwiger und Debrunner, *Israel J. Math.*, **3** (1965), 187—198.
2. Eigenschaften der Nerven homologisch-einfacher Familien im R^n, Диссертация, Göttingen, 1967.

Вислер (Wiesler H.)
1. Despre convexitatea unor coordonate baricentrice generalizate, *Stud. Cerc. Math.*, **15** (1964), 369—373.

Ву (Wu W.)
1. On a theorem of Leray, *Scientia Sinica*, **10** (1961), 793—805; *Chinese Math.*, **2** (1962), 398—410.

Гилмор и Гофман (Gilmore P. C., Hoffman A. J.)
1. A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Canad. J. Math.*, **16**, № 3 (1964), 539—548.

Гейер и Рей (Geyer E. P., Reay J. R.)
1. Intersection bases on convex cones (в печати).

Грёнвуд и Эусанио (Groenewoud C., Eusanio L.)
1. Probleme 63-5, The smallest covering cone or sphere, *SIAM Rev.*, **5** (1963), 156; Solution by C. L. Lewson, *SIAM Rev.*, **5** (1963), 415—416.

Грюнбаум (Grünbaum B.)
23. Strictly antopodal sets, *Israel J. Math.*, **1** (1963), 5—10.
24. Grötzsch's theorem on 3 colorings, *Michigan Math. J.*, **10** (1963), 303—310.
25. Convex sets and the combinatorial theory of convex polytopes, Proc. CUMP Geometry Conf., Santa Barbara, 1967, vol. 1, 42—153.

Гюи и Кей (Guay M., Kay D. C.)
1. Convexity and a certain property P_m (в печати).

Данцер и Грюнбаум (Danzer L., Grünbaum B.)
2. Intersections properties of boxes in R^d, *J. London Math. Soc.* (в печати).

Дебруннер и Флор (Debrunner H., Flor P.)
1. Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen, *Arch. Math.*, **15** (1964), 445—447.

Дерри (Derry D.)
1. A Helly type theorem for poligons, *Rend. Acad. Naz. Lincei* (8), **41** (1966), 290—296.

Дугунди (Dugundji J.)
1. A duality property of nerves, *Fund. Math.*, **59** (1966), 213—219.

Дынкин Е. Б. и Успенский В. А.
1*. Математические беседы, М.-Л., Гостехиздат, 1952.

Зейдель и ван Волленховен (Seidel J. J., van Vollenhoven J.)
1. Mutually congruent conics in a net, *Simon Stevin*, **37** (1963), 20—24.

Ивз (Ives R. T.)
1. A generalization of Steinitz' theorem, Abstract 640-47, *Amer. Math. Soc. Notices*, **13** (1966), 849.

Калман (Kalman J. A.)
1. Continuity and convexity of projections and barycentric coordinates in convex polyhedra, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1017—1022.

Качарова-Каранова (Katzarowa-Karanowa P.)
1. Über ein euclidisch geometrisches Problem von B. Grünbaum, *Arch. Math.*, **18** (1967), 663—672.

Келли Л. (Kelly L. M.)
2. Linear transversals, *Proc. London Math. Soc.*, (3), **16** (1966), 264—274.

Кенелли (Kenelly J. W.)
1. A characterization of Radon partitions, *Amer. Math. Montly* (в печати).

Кирк (Kirk W. A.)
1. Congruence orders of complet and compact metric spaces, *Simon Stevin*, **40** (1966/67), 3—6.

Кли (Klee V.)
9. Finite dimensional convexity (в печати).

Конвей и Крофт (Conway J. H., Croft H. T.)
1. Covering a sphere with congruent great-circle arcs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 787—800.

Крамер (Kramer H.)
1*. Über ein Satz von Fenchel, *Mathematika* (*R. P. R.*), **9** (1967), 281—283.

Крофт (Croft H. T.)
1. On 6-points configurations in 3-space, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 289—306.

Кук (Cooke G.)
1. A problem in convexity, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 370.

Ларман (Larman D. G.)
1. Helly-type properties of unions on convex sets, *Mathematika* (в печати).

Лисовский (Lisowski P.)
1. A simple proof of a theorem of Borsuk, *Wiadom. Math.*, (2), **6** (1962), 9—10.

Мак-Малин и Шепард (McMullen P., Shephard G. C.)
1. Diagrams for centrally symmetric polytopes (в печати).

Маршо (Marchaud A.)
2. Sur les ensembles linéairement connexes, *Ann. Mat. Pura e Appl.*, **56** (1961), 131—157.

Минти (Minty G. J.)
2. On the generalization of a direct method in the calculus of variations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 315—321.

Моцкин (Motzkin T. S.)
6. Polyhedra as unions of simplices, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen 1965) Inst. Math. Univ. Copenhagen, 1967, 202.
7. A combinatorial results on maximally convex sets, Abstract 65T-303, *Notices Amer. Math. Soc.*, **12** (1965), 603.
8. Cooperative classes of finite sets in one and more dimensions, *J. Combinat. Theory*, **3** (1967), 244—251.

Моцкин и О'Нейл (Motzkin T. S., O'Neil P. E.)
1. Bounds assuring subsets in convex position, *J. Combinat. Theory*, **3** (1967), 252—255.

Моцкин и Страус (Motzkin T. S., Straus E. G.)
2. Representation of a point of a set as sum of transforms of boundary points, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 633—637.

Неутс (Neuts M. F.)
1. Points in the convex hull of a finite point set, *Simon Stevin*, **40** (1966), 77—80.

Оре (Ore O.)
1*. The four-color problem, New York, 1967.

Пеппер (Pepper P. M.)
1. Coexistence relations of $n+1$ phases in n component systems, *J. Appl. Phys*, **20** (1949), 754—760.

Петерсон (Peterson B.)
1*. Relative convexity and total convexity, *Ill. J. Math.*, **11** (1967), 616—627.

Райзер (Ryser H. J.)
1. Комбинаторная математика, М., «Мир», 1966.
2. Combinatorial configurations (в печати).

Рей (Reay J. R.)
3. An extension of Radon's theorem (в печати).

Робертс (Roberts F. S.)
1. Pepresentations of indifference relations, Диссертация, Stanford Univ., 1968.

Роджерс (Rogers C. A.)
3. Covering a sphere with spheres, *Mathematika*, **10** (1963), 157.

Родстрём (Rådström H.)
3. Combination of Hahn — Banach theorem with a theorem of Fenchel, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen 1965), Inst. Math. Univ. Copenhagen, 1967.

Рокфеллер (Rockafellar R. T.)
2. Convex analysis, Princeton, 1968.

Сётенс (Soetens E.)
1*. Convexity in Busemann spaces, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **19** (1967), 194—213.

Синден (Sinden F. W.)
1. Duality in convex programming and in projective space, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **11** (1963), 535—552.

Скорняков Л. А.
2. Системы кривых на плоскости, *УМН*, **10**, № 2 (1955), 205.

Томпкинс Ч.
1*. Лемма Шпернера и некоторые ее обобщения. В книге «Прикладная комбинаторная математика» (ред. Э. Беккенбах), М., «Мир», 1968.

Фалкерсон и Гросс (Fulkerson D. R., Gross O. A.)
1. Incidence matrices and interval graphs, Rand Corp. Mem. NRM-3994-PR, Santa Monica, 1964.
2. Incidence matrices and interval graphs, *Pacific J. Math.*, **15**, № 13 (1965), 835—855.

Фан (Fan K.)
2. Application of a theorem concerning sets with convex sections, *Math. Ann.*, **163** (1966), 189—203.

Фирей (Firey W. J.)
1. Some applications of means of convex bodies, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 53—60.

Фирей и Грёмер (Firey W. J., Groemer H.)
1. Convex polihedra with cover a convex set, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 261—266.

Флориан (Florian A.)
1. Zum Problem der Überdeckung einer Kugel durch Kugeln, *Monatsh. Math.*, **63** (1959), 351—355.

Хадвигер, Дебруннер, Кли (Hadwiger H., Debrunner H., Klee V.)
1. Combinatorial geometry in the plane, New York, 1964.

Хендерсон (Henderson D. W.)
1. Venn diagrams for more than four classes, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 424—426.

Цан (Zahn C. T., Jr.)
1. Black box maximization of circular coverage *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Sect. B. **66B** (1962), 181—216.

Чакерян и Салли (Chakerian G. D., Sallee G. T.)
1. An intersection theorem for sets of constant width (в печати).

Шёнбек (Schönbeck S. O.)
1. Extension of nonlinear contractions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 99—101.
2. On the extension of Lipschitz maps, *Arkiv för Math.*, **7** (1967), 201—209.

Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.
1*. Избранные задачи и теоремы планиметрии, М., «Наука», 1967.

Шнейдер (Schneider R.)
1. Über die Durchschnitte translations-gleicher konvexer Körper und eine Klasse konvexer Polyeder, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **30** (1967), 118—128.

Шопп (Schopp J.)
2. Über den Zusammenhang zwischen zwei Abdeckunsproblemen von *n*-dimensionalen Hyperkugelbereichen, *Elem. Math.*, **16** (1961), 35—37.
3. Verschärfung eines Kreisabdeckungssatzes, *Elem. Math.*, **17** (1962), 12—14.

Шютте (Schütte K.)
1. Minimale Durchmesser endlicher Punktmengen mit vorgeschriebenem Mindestabstand, *Math. Ann.*, **150** (1963), 91—98.

Эглстон (Eggleston H. G.)
5. On covering a regular polygon with a triange, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58** (1962), 8—11.

Эглстон, Грюнбаум, Кли (Eggleston H. G., Grünbaum B., Klee V.)
1. Some semicontinuity theorems for convex polytopes and cell-complexes, *Comment. Math. Helv.*, **39** (1964), 165—188.

Эдвардс (Edwards D. A.)
1. A characterization of Choquet simplexes, Proc. Colloq. Convexity (Copenhagen 1965), Math. Inst. Univ. Copenhagen, 1967, 67.

Эдмондс и Фалкерсон (Edmonds J., Fulkerson D. R.)
1*. Transversals and matroid partition, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, Ser. B., **B69**, № 3 (1965), 147—153.

Экхоф (Eckhoff J.)
1. Der Satz von Radon in konvexen Producktstrukturen, *Monatsh. Math.* (в печати).

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Общие указания, касающиеся используемых в книге обозначений, приведены на стр. 16—18. Некоторые из не фигурирующих на стр. 16—18 специальных символов не включены в настоящий указатель, поскольку они используются лишь в том месте, где определены. Числа справа указывают страницы, где соответствующее понятие **определяется** (или впервые вводится).

[1]) См. Грюнбаум [10].
[2]) См., например, Александров [1], стр. 158.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ

Редактор *Э. Пейсахович* Художник *А. Антонова*
Художественный редактор *В. Шаповалов*
Технический редактор *Е. Потапенкова*

Сдано в производство 12/IV 1968 г. Подписано к печати 30/X 1968 г. Бумага тип. № 3 $84 \times 108^{1}/_{32}$=2,5 бум. л. Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 8,03. Изд. № 1/4597
Цена 55 коп. Зак. 1203

Темплан изд-ва «Мир» 1968 г., пор. № 26

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29.

55 коп.